МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ № 7 (826)
ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

ТЕМА НОМЕРА

ВСЕРОССИЙСКАЯ АССОЦИАЦИЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

СССР

ЗНАКИ И ЭМБЛЕМЫ

МАТЕМАТИКА

Методический журнал
для учителей математики
Издается с 1992 г.
Выходит 10 раз в год

Издательство МЦНМО
БОЛЬШОЙ ВЛАСЬЕВСКИЙ ПЕР., 11,
МОСКВА, 119002

Издается совместно с
РОССИЙСКОЙ АССОЦИАЦИЕЙ
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Страничка журнала на сайте РАУМ:
raum.math.ru/node/179

8 (499) 241-89-79
mat@mccme.ru
mat@1september.ru

По вопросам распространения
обращаться по телефону (499) 745-80-31
e-mail: biblio@mccme.ru

Иллюстрации:
ru.freepik.com, www.klipartz.com
www.pngegg.com

Зарегистрировано ПИ №ФС77-66437 от 14.07.16 в Роскомнадзоре

Подписано в печать: 17.09.2021
Тираж: 3000 экз.
Для получения доступа
к журналу «Математика»
в электронном виде
необходима регистрация
школы в системе «СтатГрад».
Подробнее см. на сайте
statgrad.org/#2619
ISSN 2658-4042

Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул Интернациональная. д 100. корп. 8,
тел. +7 (831) 216-40-40.
Номер заказа

В НОМЕРЕ

К статьям, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

ПРОШЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ СЪЕЗД, НА ОЧЕРЕДИ ПЯТЫЙ

Л. РОСЛОВА

С 15 по 18 августа в образовательном центре «Сириус» в Сочи прошел Всероссийский съезд учителей математики. Это уже четвертый съезд, состоявшийся в современной истории. Нельзя не радоваться тому, что есть возможность собраться в широком профессиональном кругу, обсудить текущий момент, узнать что-то новое, познакомиться с коллегами из других регионов и их опытом, соотнести свои представления о том, что сейчас важно и в каком направлении идут изменения. И это даже безотносительно к тому, заметят это мероприятие «наверху», почтит ли руководство его своим вниманием и присутствием.

В этот раз с вниманием все было на высшем уровне: открыли съезд руководитель образовательного центра «Сириус» Е.В. Шмелева и помощник Президента Российской Федерации А.А. Фурсенко; на вопросы участников ответил Министр просвещения Российской Федерации С.С. Кравцов; перед учителями с лекциями по актуальным исследованиям в области математики выступили лауреаты премии Филдса А.Ю. Окуньков и С.К. Смирнов.

Одним из организаторов съезда выступила Ассоциация учителей математики. В работе съезда приняли участие более 300 человек из 60 регионов: учителя и преподаватели математики, специалисты по педагогике и методике преподавания, научные сотрудники, представители вузов и органов управления в сфере образования. Это немало, если учесть непростые условия, в которых приходится существовать в последнее время. Все мероприятия можно было смотреть в прямой трансляции на YouTube.

Значительная часть выступлений была связана с углубленным изучением математики, с олимпиадами и кружками. Но и проблемы базового обучения не были забыты, что особенно ярко проявилось в общении с министром, ведь учителя попытались донести до него наболевшее и хотели получить ответы на самые злободневные вопросы.

Трансляция пленарных выступлений съезда доступна на сайте «Сириуса», если перейти по ссылке Всероссийский съезд учителей математики в Сириусе (siriusconf.ru), выступления по программе съезда можно найти на YouTube.

Резолюцию съезда мы разместили в этом номере журнала (с. 4). Статьи, основанные на выступлениях на съезде, будем печатать в следующих номерах.

Ну а на конец года запланирован еще один съезд, который традиционно проводит МГУ им. М.В. Ломоносова. Есть возможность продолжить общение.

15–18 августа 2021 г.
Федеральная территория «Сириус»

РЕЗОЛЮЦИЯ IV ВСЕРОССИЙСКОГО СЪЕЗДА УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

IV Всероссийский съезд учителей математики организован образовательным центром «Сириус», межрегиональной организацией «Ассоциация учителей математики» и Ассоциацией школ-партнеров центра «Сириус» при партнерстве и поддержке Министерства просвещения Российской Федерации, МГУ им. М.В. Ломоносова и Московского центра непрерывного математического образования.

В работе съезда приняли участие более 300 представителей 60 субъектов Российской Федерации: учителя, преподаватели вузов, ученые-математики, специалисты по педагогике и методике преподавания математики, педагоги центров дополнительного образования, руководители образовательных организаций и представители органов управления образованием.

На заседаниях семи секций съезда заслушано в общей сложности более 80 докладов и сообщений, работали семь круглых столов и дискуссионных групп.

В работе съезда приняли участие помощник Президента России Андрей Александрович Фурсенко, руководитель фонда «Талант и успех» Елена Владимировна Шмелева, лауреаты Филдсовской премии Станислав Константинович Смирнов и Андрей Юрьевич Окуньков.

На открытии съезда прозвучали обращения и приветствия Виктора Антоновича Садовничего, Никиты Юрьевича Анисимова, Дмитрия Викторовича Ливанова, Анастасии Владимировны Зыряновой.

Состоялась онлайн-встреча участников съезда с министром просвещения Сергеем Сергеевичем Кравцовым, на которой обсуждались острые вопросы и проблемы математического образования.

Значительное место в докладах, сообщениях, дискуссиях и круглых столах заняло обсуждение целей и методов цифровизации математического образования, роли учителя в условиях цифрового развития школы.

Участниками съезда предлагались пути решения актуальных проблем современного математического образования в России и задач, определенных Концепцией развития математического образования и поручением Президента РФ «Об обеспечении совершенствования преподавания»* математики от 31 декабря 2020 г.

В рамках съезда прошла конференция Межрегиональной ассоциации учителей математики, на которой принято решение о преобразовании ассоциации в общероссийскую общественную организацию «Учителя математики России», избран ее президент и сформированы рабочие органы.

* При участии заинтересованных образовательных организаций и международных математических центров мирового уровня обеспечить совершенствование преподавания учебных предметов «Математика» и «Информатика» в общеобразовательных организациях, установив их приоритет в учебном плане и скорректировав содержание примерных основных образовательных программ общего образования.

Отмечая растущую роль математики в современном мире, растущий запрос общества на специалистов с хорошей математической подготовкой, съезд считает важнейшей задачей школьного образования создание условий, при которых каждый школьник осваивает математические знания, необходимые ему в жизни. При этом должна быть обеспечена возможность освоения математики на уровне, необходимом для продолжения образования, использования математики в будущей профессии или как инструмента творчества в научной деятельности.

Съезд считает значимыми и важными следующие тезисы

1. Съезд с благодарностью отмечает высокую роль российского учительства в организации обучения школьников в условиях пандемии, в том числе ускоренное освоение дистанционных цифровых инструментов.

2. Съезд поддерживает внедрение ФГОС основного общего образования по математике на базовом и углубленном уровнях, разработанного и утвержденного с учетом предложений, высказанных в резолюции III Съезда учителей математики*.

3. Съезд считает, что обновление содержания математического образования в соответствии с запросами цифровой экономики, реализованное во ФГОС ОО путем выделения учебного курса «Вероятность и статистика», неразрывно связано с установлением приоритета математики в учебном плане.

4. Съезд отмечает, что в действующих примерных учебных программах старшей школы значительное время выделяется на элементы содержания, которые фактически не осваиваются большинством учащихся и не входят в материалы ЕГЭ по математике. В связи с этим съезд считает необходимым в обновленных учебных программах перераспределить время в пользу актуальных и приоритетных разделов курса математики, обеспечить реалистичность объема материала, изучаемого в старшей школе, и содержательное соответствие спецификации ЕГЭ и примерных программ. Общероссийская общественная организация «Учителя математики России» выражает готовность принять участие в разработке и экспертизе программ основного и среднего общего образования.

5. Съезд считает приоритетной задачей повышение уровня математической подготовки студентов, проходящих обучение по программам математического и физико-математического направлений в педагогических вузах. Съезд отмечает важность поддержки исследований и разработок в области методики преподавания математики в вузах, реализующих программы подготовки учителей математики.

* III Съезд учителей математики прошел в Новосибирске 18–19 ноября 2015 г.

6. Участники съезда констатируют, что в ходе и в результате цифровизации системы образования роль учителя не снижается, а возрастает. В этой связи съезд считает важным информирование учителей о наиболее эффективных современных цифровых учебных технологиях и передовых практиках и считает необходимым проведение исследований, направленных на формирование цифровой дидактики. При этом съезд обращает внимание на риски, связанные с появлением и использованием низкокачественного цифрового контента.

7. Съезд отмечает важную роль профессионального математического сообщества в школьном математическом образовании и считает необходимым всемерно способствовать участию ученых-математиков в учебном процессе, в создании учебных материалов и популяризации математики, в том числе в средствах массовой информации.

8. Съезд отмечает, что многие успешные школьные учителя математики получили математическое образование в классических университетах и ведущих технических вузах. В этой связи съезд считает необходимым всемерное привлечение к учительской профессии лучших студентов и выпускников вузов математических и технических специальностей, а также создание механизмов работы студентов математических и технических специальностей в школе и в системе дополнительного образования в качестве учителей и преподавателей математики, руководителей математических кружков.

9. Съезд считает, что в рамках мероприятий, связанных с подготовкой к проведению Года математики в России в 2023 году, следует оснастить школы комплектами книг по математике, научно-популярными математическими журналами, математическими моделями и играми.

10. Съезд отмечает успешную работу тренерского штаба сборной России по математике и образовательного центра «Сириус» в подготовке школьников к международным олимпиадам по математике.

11. Съезд считает важной поддержку школьников, добившихся успехов в математических олимпиадах на федеральном и региональном уровнях. Съезд отмечает, что в ряде регионов с учетом решений III Съезда была усилена работа по поиску и развитию талантов в области математики.

Окончание на с. 11.

Г. КОНЕВА,
О. НИКИФОРОВА,
Т. ОРЛОВА,
Т. МАЛЕНКОВА,
г. Улан-Удэ,
Республика Бурятия

РАБОТА С ОДАРЕННЫМИ ДЕТЬМИ В РЕСПУБЛИКЕ БУРЯТИЯ

Творческое объединение учителей, работающих по программе углубленного изучения математики, возникло в г. Улан-Удэ в 90-е годы. Тогда не было хороших школьных учебников для углубленного изучения математики, не было методической литературы, не было интернета. Это обстоятельство подвигло учителей из разных школ города создать республиканскую общественную организацию «Байкальский образовательный центр «Эврика» под руководством К.Т. Латкиной, заслуженного учителя Республики Бурятия. [1]

На первых порах основной целью нашего союза был только обмен опытом, освоение программы углубленного изучения математики. В дальнейшем мы стали расширять поле нашей деятельности. И одной из главных задач мы обозначили помощь учителям города и республики в освоении программы углубленного изучения математики. В целях реализации этой задачи мы каждый четверг на базе Бурятского республиканского института образовательной политики проводим постоянно действующий семинар по обмену опытом по программе подготовки к ЕГЭ и ОГЭ по математике. Программа семинара составляется на полгода. В настоящее время семинар проводится дистанционно. И если в предыдущие годы мы организовывали выездные творческие лаборатории с лекциями для учителей и учащихся школ республики, то теперь дистанционно на нашем семинаре могут присутствовать учителя школ всей республики.

Вторая наша главная задача — это популяризация математики среди учащихся, внешкольное математическое образование, математические соревнования. Эта задача предполагает работу с одаренными детьми города и республики, создание условий для интеллектуального развития учащихся, раскрытие их интересов и склонностей к научно-поисковой деятельности, развитие таланта школьников. Решая эту задачу, мы проводим олимпиады, математические регаты, собеседование по отбору в летнюю физико-математическую школу при Новосибирском государственном университете (НГУ), организуем учебу в специализированном учебно-научном центре НГУ.

Вот уже несколько лет ежегодно в г. Улан-Удэ проходят городские конкурсы и олимпиады:

– в октябре — олимпиада «Математическое интеллектуальное дело» (МИД); отвечает за организацию и проведение гимназия № 14;

– в декабре — олимпиада «Горизонты успеха»; отвечает за организацию и проведение СОШ № 37;

– в феврале — олимпиада «Математические ростки»; отвечает за организацию и проведение СОШ № 26;

– в марте — олимпиада «Математика. Информатика. Физика» (МИФ); отвечает за организацию и проведение физико-математическая школа № 56;

– в апреле — городской конкурс «Быстрый счет»; отвечает за организацию и проведение гимназия № 14.

В мартовские каникулы традиционно проходит городское внеклассное мероприятие «Математическая регата» (подробно о нем мы уже писали в журнале «Математика», 2019, № 3).

Ежегодно в феврале или марте проходит собеседование-олимпиада по отбору в летнюю физико-математическую школу при НГУ.

Олимпиада «Математические ростки», 5–7-е классы

Среди задач, которые современное общество ставит перед школьным образованием, важное место занимают поиск и отбор способных учащихся, а также мотивирование школьников на углубленное изучение выбранного предмета. Апробированным и хорошо зарекомендовавшим себя методом решения этих задач является проведение предметных олимпиад.

В 2010 году математические олимпиады проводились только для младших и старших школьников, для учащихся 5–7-х классов соревнований не было. Как показывает практика, если не начать работать с детьми в 5–7-х классах, то потом вызвать интерес и побудить ребенка серьезно работать над задачами очень сложно.

Олимпиадный дух — это не просто дух соперничества, это особая атмосфера творчества, стремление доказать всем, и в первую очередь себе, возможность решить поставленную задачу. И привнесение хотя бы части этой атмосферы в школьную жизнь, закрепление за начальным этапом олимпиадного движения в школьном образовании своей особой ниши дает отличный старт в развитии навыков борьбы и интеллектуального состязания. Стремление к саморазвитию даже просто ради того, чтобы сказать самому себе: «Я молодец! Я решил задачу! Я сделал это». [3]

Методическое объединение учителей математики школы № 26 г. Улан-Удэ проявило инициативу и организовало городскую олимпиаду для школьников 5–7-х классов. Олимпиада «Математические ростки» впервые была проведена в марте 2010 года. Принимали в ней участие ребята из школ г. Улан-Удэ, которые входили в состав Байкальского образовательного центра «Эврика». Первый опыт оказался удачным, и через три года наша олимпиада получила статус городской. Ежегодно в ней принимают участие около 500 учащихся.

Основными *задачами* олимпиады являются: повышение интереса учащихся к математике; активизация всех форм внеклассной и внешкольной работы.

Задания составляются учителями школы; в каждой параллели предлагается решить пять задач; время выполнения 1,5–2 часа. Стараемся, чтобы задачи имели привлекательную, запоминающуюся форму, были разнообразными по содержанию. Для проверки олимпиадных работ создаются комиссии, работы проверяются в день проведения олимпиады.

Победители и призеры олимпиады «Математические ростки» награждаются грамотами и денежными призами. Церемония награждения завершается для всех участников чаепитием. В 2019/2020 учебном году олимпиада была впервые проведена дистанционно.

Примеры заданий

5-й класс

1. Известно, что $1111 : 101 = A$. Чему равно $3333 : 101 + 6666 : 303$.

2. Владелец маленького магазинчика заплатил 1000 рублей за упаковку авторучек. Когда он продал две трети этих авторучек, то вернул три четверти денег, затраченных на покупку. Сколько денег он получит, продав всю упаковку?

3. С числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: заменять его числом, которое в 2 раза больше, и стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций из числа 458 получить 14?

4. Витя заметил, что во время липового медосбора пчела вылетает из улья со скоростью 4 м/с и возвращается обратно через семь минут со скоростью 2 м/с. На каком расстоянии от улья расположена липа, с которой пчела взяла мед? Учесть, что на сбор меда с липы во время одного полета пчела затрачивает одну минуту.

5. Таня и ее папа собирали грибы. Таня нашла на 18 грибов больше, чем половина грибов, найденных папой. Папа нашел на 7 грибов больше, чем Таня. Сколько грибов нашли Таня и папа вместе?

6-й класс

1. На бумаге построен угол, равный 126°. Покажите, как с помощью чертежного треугольника построить углы 36° и 54°.

2. Цену товара снизили на 20%. На сколько процентов необходимо повысить цену товара, чтобы она стала первоначальной?

3. По берегу моря ползли две черепахи. Одной из них столько минут отроду, сколько часов другой. Вместе двум черепахам 183 дня. Сколько дней каждой черепахе?

4. Рыбаки поймали 19 рыб массой 100 г, 200 г, 300 г, ..., 1900 г. Можно ли весь улов поделить поровну между десятью рыбаками? Если можно, то как? Если нет, то почему?

5. На палке отмечены поперечные линии красного, желтого и зеленого цвета. Если распилить палку по красным линиям, то получится 9 кусков, если по желтым — 12 кусков, а если по зеленым — 8 кусков. Сколько будет кусков, если распилить палку по линиям всех трех цветов?

7-й класс

1. Карлсон написал дробь $\frac{10}{97}$. Малыш может:

а) прибавить любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно;

б) умножить числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь: а) равную $\frac{1}{2}$, б) равную 1?

2. Существует ли треугольник, градусная мера каждого угла которого выражается простым числом?

3. Круглое бревно весит 30 кг. Сколько весит другое бревно, если оно вдвое толще, но вдвое короче первого?

4. Для каждой вершины треугольника ABC нашли угол между высотой и биссектрисой, проведенными из этой вершины. Оказалось, что эти углы в вершинах A и B равны друг другу и меньше, чем угол между высотой и биссектрисой в вершине C. Чему равен угол C треугольника?

5. В одной школе обучалось вдвое больше девочек, чем мальчиков. Директор ввел обычай: ежедневно утром каждый мальчик должен был делать поклоны директору, каждому из своих товарищей и каждой девочке. Каждая девочка также должна была делать поклон директору, каждой своей подруге и каждому мальчику. Ежедневно утром можно было насчитать 900 поклонов. Сколько было мальчиков и сколько было девочек?

Городской конкурс «Быстрый счет», 2–11-е классы

Не секрет, что современные школьники слабо владеют приемами быстрого счета, устными вычислительными навыками. Это обстоятельство подвигло нас, учителей гимназии № 14, разработать конкурс «Быстрый счет». Проведение такого конкурса стимулирует учителей и учащихся к поиску приемов быстрого счета, к тренировкам и выработке вычислительных навыков. Впоследствии конкурс получил статус городского конкурса.

Перед проведением конкурса в школах проходит школьный тур, по итогам которого от каждой параллели выбирается победитель. Этот ученик и будет представлять школу на конкурсе «Быстрый счет».

Положение о городском конкурсе по математике «Быстрый счет» определяет статус, цели, задачи, порядок проведения конкурса и участия в нем, его организационно-методическое обеспечение и определение победителей.

Цели конкурса: стимулирование интереса школьников к занятиям математикой и поддержка одаренных и талантливых школьников; развитие творческого потенциала и повышение информационной и вычислительной компетентности; формирование у учащихся навыков самостоятельности, рационального и эффективного использования времени.

Основные *задачи*: способствовать формированию у обучающихся сознательных и прочных вычислительных навыков; способностей к разным видам вычислений: письменных, устных, письменных с промежуточными устными вычислениями; способствовать формированию таких качеств личности, как ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, способность к преодолению трудностей.

В конкурсе принимают участие учащиеся 2–11-х классов. Каждая возрастная категория участников получает бланк со своим вариантом задания. Бланки с ответами и данными участников после проведения конкурса сдаются организатору в аудитории и направляются в оргкомитет. Участникам конкурса запрещено выполнять задания коллективно или с посторонней помощью, пользоваться калькулятором.

Задания разделены на три части. Первая часть состоит из 20 заданий базового уровня, каждое из которых оценивается в 1 балл. Вторая часть состоит из 10 заданий уровней базового и выше базового, каждое оценивается в 2 балла. Третья часть состоит из 5 заданий повышенного уровня. Задания этой части оцениваются уже в 3 балла. За всю работу участник конкурса может получить максимум 55 баллов. Участник вносит только ответы в разработанный бланк. По положению, на выполнение работы отводится для младших школьников и учащихся 5–8-х классов 30 минут, а для учащихся 9–11-х классов — 40 минут.

Победители определяются по шкале с наивысшим баллом за работу. Победители и призеры награждаются дипломами 1-, 2- и 3-й степени и денежными премиями. Остальные участники получают сертификаты.

Примеры заданий для 10-го класса

Часть 1

Вычислите (1–20).

1. $(-12+5)\cdot(-3-(-7))$.
2. $1{,}4\cdot(-1{,}5)\cdot 1{,}6$.
3. $\dfrac{1{,}8\cdot 2{,}4}{1{,}2}$.
4. $\left(\sqrt{48}-\sqrt{12}\right)^2$.
5. $\dfrac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14}$.
6. $\sqrt{3}\left(3\sqrt{27}+4\sqrt{3}\right)$.
7. $36^{\frac{3}{2}}-0{,}36$.
8. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\dfrac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.
9. $\left(5^{-3}\cdot\dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}-0{,}1$.
10. $\dfrac{3\frac{19}{21}\cdot 2\frac{17}{19}}{2\frac{11}{15}\cdot 4\frac{5}{7}}$.
11. $\sqrt{5\dfrac{4}{9}}-\sqrt{\dfrac{4}{9}}$.
12. $\sqrt{109\dfrac{23}{48}-108\dfrac{35}{36}+\dfrac{1}{18}}$.
13. $\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{5^{2,5}}{5^{1\frac{1}{2}}}\right)^{-2}+0{,}24$.
14. $\dfrac{326^2-27^2}{353}$.
15. $5\sin\dfrac{11\pi}{12}\cos\dfrac{11\pi}{12}$.
16. $\dfrac{26}{\sin\left(-\dfrac{47\pi}{6}\right)\cos\dfrac{32\pi}{3}}$.
17. $12\sqrt{6}\,\sin\dfrac{9\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3}$.
18. $15\dfrac{\sin^2 9^\circ-\cos^2 9^\circ}{\cos 18^\circ}$.
19. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}$.
20. $2^{3-\sqrt{2}}\cdot 2^{3+\sqrt{2}}-100$.

Часть 2

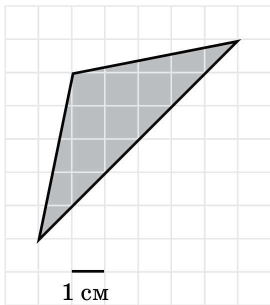
Вычислите (1–6).

1. $\left(-3\dfrac{2}{5}-1\dfrac{3}{7}\right)\cdot 437{,}5$.
2. $\dfrac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)^2}{10+\sqrt{91}}$.
3. $\left(\sqrt{3\dfrac{5}{17}}-\sqrt{7\dfrac{7}{17}}\right):\sqrt{\dfrac{7}{34}}$.
4. $\dfrac{2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.
5. $\dfrac{\cos 16^\circ\cos 36^\circ-\sin 16^\circ\cos 54^\circ}{\sin 19^\circ\cos 19^\circ\sin 30^\circ}$.
6. $\dfrac{12-6\sin 30^\circ}{-3\sin^2 30^\circ-3\cos^2 30^\circ}$.

7. В треугольнике ABC $AC=BC=5$, $\sin\angle A=\dfrac{7}{25}$. Найдите AB.

8. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,25 г три раза в день в течение 18 дней. В одной упаковке 8 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

9. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



10. Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 900 рублей после повышения цены на 10%?

Часть 3

Вычислите (1–4).

1. $\sqrt{435^2-300^2}$.
2. $2x-7+\sqrt{4x^2-20x+25}$, если $x=2{,}35$.
3. $\dfrac{\cos^2 39^\circ-\sin^2 21^\circ}{\cos 162^\circ}$.
4. $\dfrac{4\sin 25^\circ\sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$.
5. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{5\sin\alpha-3\cos\alpha}{3\sin\alpha+14\cos\alpha}=0{,}35$.

Олимпиада по математике, информатике, физике «МИФ», 7–11-е классы

Ежегодно с 2010 года на базе физико-математической школы № 56 г. Улан-Удэ проводится городская олимпиада «МИФ» по математике, физике и информатике, которая организована под эгидой РОО БОЦ «Эврика», комитета по образованию администрации г. Улан-Удэ, института математики и информатики и физико-технического факультета Бурятского государственного университета.

Целью проведения олимпиады является выявление одаренных и талантливых школьников, привлечение их к изучению математики, информатики и физики на профильном уровне, их дальнейшего интеллектуального развития и профессиональной ориентации; пропаганда знаний в области математики, информатики, физики и активизация работы школ и учреждений дополнительного образования города; формирование национальной интеллектуальной элиты.

В олимпиаде принимают участие учащиеся 7–11-х классов общеобразовательных учреждений г. Улан-Удэ. Норма представительства от школы составляет 15 человек (по три человека от параллели). Время проведения олимпиады февраль или март. Прием заявок на участие осуществляется за 10–15 дней до начала олимпиады.

Количество участников за последние пять лет составило более 450 человек. Следует отметить, что с 2012 года в олимпиаде принимают участие школьники из различных районов Республики Бурятия.

Перед началом олимпиады мы проводим открытие олимпиады, на котором напоминаем учащимся правила проведения. Ребятам для решения предложена серия из трех задач по каждому предмету: математике, физике, информатике. Продолжительность олимпиады 3 часа, по часу на каждый предмет. Первый час — «Математика», второй — «Физика», третий — «Информатика». Участникам не разрешается приносить с собой и использовать справочные материалы; при выполнении заданий по физике (и только на втором часе) разрешается использовать простейший калькулятор (выполнение действий: сложение, вычитание, умножение, деление).

Участник олимпиады получает комплект заданий на каждый час.

Наборы заданий по предметам разрабатываются ежегодно, но неизменным остается оценивание каждого задания по каждому из предметов определенным количеством баллов. Это связано с необходимостью корректного подведения итогов для выявления победителей и призеров по каждому предмету и абсолютного победителя в параллели. Первая задача всегда оценивается в 2 балла, вторая — в 3 балла, третья — в 5 баллов. Задачи по предмету «Математика» предлагаются трех видов: вычислительная, логическая, геометрическая.

Проверку решений осуществляет жюри, состоящее из трех комиссий (по каждому из предметов), в которые входят учителя высшей категории школ города и преподаватели ИМИ БГУ и ФТФ БГУ. В каждой комиссии выделяется ответственный член жюри, организующий работу этой комиссии. Он уполномочен принимать окончательное решение в спорных ситуациях. Общее руководство осуществляет оргкомитет олимпиады.

Победителями и призерами олимпиады считаются участники, набравшие суммарно наибольшее количество баллов в параллели по каждому предмету. Абсолютные победители — это победители или призеры по двум или трем предметам. Участник, набравший 0 баллов по одному из предметов, не может считаться абсолютным победителем олимпиады.

Каждый участник получает свидетельство. Победители и призеры награждаются дипломами 1-, 2- и 3-й степени. Ежегодно по итогам олимпиады комитет по образованию г. Улан-Удэ издает приказ, утверждающий список победителей.

Награждение победителей, призеров и абсолютных победителей происходит после подведения итогов олимпиады «МИФ».

Примеры заданий для 7-го класса

Математика

1. (*2 балла*) Докажите, что число

$$4 \cdot 2012^2 + 8 \cdot 2012 \cdot 2011 + 3 \cdot 2011^2$$

составное.

2. (*3 балла*) Среди шести монет находится одна фальшивая, но неизвестно, легче она настоящих или тяжелее. Среди этих монет известна также и одна настоящая монета. Необходимо с помощью двух взвешиваний на чашечных весах определить фальшивую монету.

3. (*5 баллов*) Есть прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы отложены отрезки $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол KCM.

Физика

1. (*2 балла*) Из 100 см³ свинца (плотность 11,3 г/см³) и 200 см³ никеля (плотность 8,9 г/см³) изготовили сплав. Какова его плотность?

2. (*3 балла*) Со скоростью 15 км/ч велосипедист проехал первую половину пути по ровной дороге, а вторую половину пути шел пешком со скоростью 5 км/ч. Определите среднюю скорость движения велосипедиста.

3. (*5 баллов*) В левое колено *U*-образной трубки с водой долили слой керосина высотой 15 см. На сколько сантиметров поднялся уровень воды в правом колене? (Плотность воды 1000 кг/м^3; плотность керосина 800 кг/м^3.)

Информатика

1. (*2 балла*) Сколько различных двухбуквенных слогов можно образовать из шести букв слова ЗАДАЧА?

2. (*3 балла*) Дэвиду Копперфильду дали три запечатанных конверта. В каждом лежит красный или белый лист бумаги, на котором написаны два утверждения. В одном конверте оба утверждения истинны, в другом — оба ложны, а в третьем — одно ложно и одно истинно. Вот эти утверждения.

Конверт 1

1. Листок в этом конверте белый.
2. Во втором конверте листок красный.

Конверт 2

1. В первом конверте листок белый.
2. В третьем конверте красный листок.

Конверт 3

1. В этом конверте белый листок.
2. В первом конверте листок красный.

Копперфильд должен сжечь конверт, в котором находится красный листок. Какой из конвертов он сожжет?

3. (*5 баллов*) Какой минимальный объем памяти (в Кбайт) нужно зарезервировать, чтобы можно было сохранить любое растровое изображение размером 128 × 128 пикселей при условии, что в изображении могут использоваться 256 различных цветов?

В настоящее время более 50 школ города вовлечены в работу с одаренными детьми и принимают участие в наших мероприятиях. С 2013 года во внеурочную деятельность были вовлечены также и школы республики.

Новизна и своеобразие нашего образовательного центра состоят в организации сетевого взаимодействия учеников и учителей, в возможности выхода учеников и учителей из пространства отдельной школы в сетевое учебное пространство района, города, республики, региона.

Источники информации

1, 2. Режим доступа. — briop.ru. **3.** Режим доступа. — science-start.ru/ru/article/view?id=1771.

РЕЗОЛЮЦИЯ IV ВСЕРОССИЙСКОГО СЪЕЗДА УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

15–18 августа 2021 г. Федеральная территория «Сириус»

Окончание. Начало на с. 4.

В то же время съезд констатирует, что во многих регионах школьники, добивающиеся успехов во Всероссийской математической олимпиаде, их учителя и учебные заведения, в которых они обучаются, не получают должной административной и финансовой поддержки со стороны региональных руководителей и органов управления образованием и что это приводит к возникновению неравных условий для развития математической одаренности школьников в разных регионах.

12. Съезд выражает озабоченность в связи с избыточным количеством документации, не свойственной учительской специальности, но требуемой от учителей математики; эта проблема отмечена делегатами из многих регионов.

13. Съезд высказывает обеспокоенность избыточным числом контрольных мероприятий, в том числе ВПР, а также использованием результатов ВПР для выстраивания региональных рейтингов школ, сравнения учебных достижений и оценки качества работы учителей. Съезд считает необходимым разделение функций диагностических процедур, которые помогают учителю своевременно выявлять и ликвидировать пробелы в знаниях школьников, и контрольных процедур, по результатам которых принимаются административно-управленческие решения. В то же время съезд рекомендует поддержать российские исследования оценки качества математического образования.

Съезд поручает организационному комитету съезда

1. Направить настоящую резолюцию в федеральные органы власти, в Общероссийский Народный Фронт, в органы исполнительной власти субъектов Российской Федерации, осуществляющие государственное управление в сфере образования.

2. Опубликовать настоящую резолюцию в Сети интернет и профильных печатных изданиях.

А. БЛИНКОВ,
Н. НЕТРУСОВА,
г. Москва

XVI ЗАОЧНЫЙ ТВОРЧЕСКИЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Подведены итоги XVI Заочного творческого конкурса учителей математики, который был организован Московским центром непрерывного математического образования и журналом «Математика» совместно с Центром педагогического мастерства (см. № 1/2021). Информация о конкурсе также традиционно размещалась по адресу http://www.mccme.ru/oluch. Там же опубликованы материалы прошедших очных и заочных конкурсов, задания и итоги которых также ежегодно публиковались в журнале «Математика». Материалы нескольких первых конкурсов можно найти и в брошюре «Творческие конкурсы учителей математики», вышедшей в издательстве МЦНМО в 2008 году. Большинство задач методической части конкурсов вошло в книгу «Учимся на чужих ошибках» (сост. А. Блинков; МЦНМО, 2019).

В очередной раз отметим, что основная цель конкурса — стимулировать проявление профессиональных качеств учителя. В ходе выполнения работы участники могли показать свое умение решать задачи, умение найти ошибку в чужом решении и отличить верное решение от неверного, продемонстрировать математическую эрудицию. Отдельно подчеркнем важность методического и аналитического разделов, так как они в большей степени отражают повседневную работу учителя. Но и ряд заданий первой части составлены так, чтобы сподвигнуть учителей на дальнейшее обсуждение со школьниками возможных ошибок. На выполнение заданий конкурса отводилось более трех месяцев.

Задания для проведения конкурса были подготовлены методической комиссией, работавшей на базе МЦНМО. Вариант, по традиции, включал в себя *три блока*.

Первый блок (математический) содержал задачи, которые требовалось решить.

Второй блок (методический) содержал формулировки «задач» и их «решения», в которых требовалось найти ошибки и, по возможности, привести верные решения.

Эти блоки включали в себя задания по арифметике, алгебре и началам анализа, геометрии, тригонометрии, комбинаторике, теории вероятностей.

Третий блок (аналитический) состоял из одного задания, в котором требовалось осмыслить актуальную проблему современного образовательного процесса.

Количество участников конкурса в последние годы не увеличивается, но уровень присылаемых работ растет год от года. География участников конкурса обширна и разнообразна — от Москвы и Санкт-Петербурга до маленьких поселков и деревень из многих краев, областей и республик России (от северных и западных районов до Сибири и Юга России), а также из Беларуси и Казахстана.

Каждое задание оценивалось исходя из 10 баллов. Победителями конкурса объявлены участники, набравшие не меньше 77 баллов из 90 возможных (10 индивидуальных работ и 4 коллективные). Призерами конкурса стали участники, набравшие не меньше 60 баллов (одна коллективная работа и 15 индивидуальных). Список победителей и призеров публикуется отдельно.

Отметим, что многие из участников не впервые становятся победителями или призерами заочного конкурса, некоторые из них уже были и лауреатами очных конкурсов в различные годы. Победители и призеры конкурса будут награждены специальными дипломами от журнала «Математика». Планируется, что все победители и призеры, имеющие нагрузку в школе не меньше 9 уроков в неделю и не являющиеся победителями или призерами очного конкурса учителей по математике 2020 года, будут приглашены в сентябре 2021 года для участия в очном туре XVIII Творческого конкурса учителей по математике с оплатой проживания и питания в г. Москве (конкурс планируется провести 19 сентября, если позволит эпидемиологическая ситуация).

В очном туре конкурса могут также принять участие все желающие. Для участия достаточно в сентябре 2021 года зарегистрироваться на сайте конкурса. Информация об очном туре конкурса и о следующем заочном конкурсе будет опубликована в журнале «Математика» и на сайте МЦНМО.

В тексте, приведенном ниже, наряду с авторскими решениями и решениями жюри, мы, по традиции, использовали понравившиеся нам фрагменты решений участников конкурса.

Задания конкурса, ответы и решения, комментарии и критерии проверки

I. Решите задачи

1. (*Предложил А. Блинков.*) В киноконцертном зале 374 кресла, расположенные в виде прямоугольника. В жестких условиях социальной дистанции запрещено заполнять ряды с четными номерами, а на остальных рядах между любыми двумя зрителями должно оставаться не меньше двух свободных кресел. Какое наибольшее количество билетов может быть продано с соблюдением этих условий? (*Будем считать, что и количество рядов, и количество мест в ряду больше двух.*)

Ответ: 72 билета.

Решение. Разложим число 374 на простые множители: $374 = 2 \cdot 11 \cdot 17$. Учитывая, что и количество рядов, и количество мест в ряду больше двух, получим, что возможны четыре случая.

1. 22 ряда по 17 мест. Тогда могут быть заняты 11 рядов, по 6 мест в каждом. Итого: $11 \cdot 6 = 66$ проданных билетов.

2. 17 рядов по 22 места. Тогда могут быть заняты 9 рядов, по 8 мест в каждом. Итого: $9 \cdot 8 = 72$ проданных билета.

3. 34 ряда по 11 мест. Тогда могут быть заняты 17 рядов, по 4 места в каждом. Итого: $17 \cdot 4 = 68$ проданных билетов.

4. 11 рядов по 34 места. Тогда могут быть заняты 6 рядов, по 12 мест в каждом. Итого: $6 \cdot 12 = 72$ проданных билета.

Комментарий. При подсчете количества занятых мест в одном ряду можно использовать предположение, что если в ряду n мест и n не кратно трем, то может быть занято $\left[\frac{n}{3}\right]+1$ место.

Критерии проверки:

– верно рассмотрены все случаи и получен верный ответ — 10 баллов;

– задача не решена или решена неверно — 0 баллов.

2. (*Фольклор.*) Решите уравнение

$$\frac{1}{2^{\sin^2 x}}+\frac{1}{2^{\cos^2 x}}=\sin x+\cos x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Решение. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим,

$$\frac{1}{2^{\sin^2 x}}+\frac{1}{2^{\cos^2 x}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2^{\sin^2 x}}\cdot\frac{1}{2^{\cos^2 x}}}=2\sqrt{\frac{1}{2^{\sin^2 x+\cos^2 x}}}=\sqrt{2}.$$

Вместе с тем

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}.$$

Следовательно, равенство возможно только в случае, когда значение обеих частей равно $\sqrt{2}$.

Рассмотрим правую часть:

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,$$

$$n \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

При найденных значениях x выполняется равенство $\sin^2 x = \cos^2 x$, поэтому неравенство, полученное при оценке левой части, также обращается в равенство.

Комментарий. Оценку левой части уравнения можно произвести иначе:

$$\frac{1}{2^{\sin^2 x}}+\frac{1}{2^{\cos^2 x}}=\frac{1}{2^{\sin^2 x}}+\frac{1}{2^{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{2^{\sin^2 x}}+\frac{2^{\sin^2 x}}{2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2^{\sin^2 x}}+\frac{2^{\sin^2 x}}{\sqrt{2}}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2=\sqrt{2},$$

так как сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше, чем 2.

Критерии проверки:

– приведено верное обоснованное рассуждение и получен верный ответ — 10 баллов;

— приведено в целом верное рассуждение, получен верный ответ, но в обосновании есть пробел — 9 баллов;

– присутствует идея использования ограниченности функций, но обоснования отсутствуют — 4 балла;

– задача не решена или решена неверно — 0 баллов.

3. (*А. Карлюченко. Сангаку. Японская храмовая геометрия. — К.: Сталь, 2012 (задача 3.5).*) В окружности проведена хорда AB, на которой отмечена точка X. В каждый из двух образовавшихся сегментов вписана окружность, содержащая точку X. Докажите, что отношение радиусов вписанных окружностей не зависит от выбора точки X.

Доказательство. Пусть O — центр исходной окружности, O_1, r_1 и O_2, r_2 — центры и радиусы окружностей, вписанных в сегменты.

Способ I. Пусть прямая, проходящая через точку X перпендикулярно AB, пересекает вписанные окружности в точках P и Q, тогда XP и XQ — диаметры этих окружностей (рис. 1).

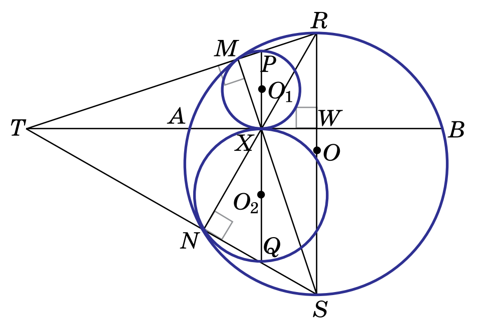


Рис. 1

Проведем диаметр RS большой окружности, параллельный PQ, который пересекает AB в точке W. Буквами M и N обозначим точки касания окружностей.

По лемме о сегменте, прямые MS и NR проходят через точку X. Тогда точка P лежит на отрезке MR, так как

$$\angle PMX = 90^\circ = \angle RMS.$$

Аналогично точка Q лежит на отрезке NS.

Пусть прямые MR и NS пересекаются в точке T. Так как X — ортоцентр треугольника RST, то T лежит на прямой AB. Из подобия треугольников TPX и TRW получим:

$$\frac{PX}{RW}=\frac{TX}{TW}.$$

Из подобия треугольников TQX и TSW следует, что

$$\frac{QX}{SW}=\frac{TX}{TW}.$$

Значит,

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{PX}{QX}=\frac{RW}{SW},$$

что и требовалось, так как последнее отношение не зависит от выбора точки X. В случае, когда точка X совпадает с W, справедливость равенства

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{RW}{SW}$$

очевидна.

Способ II. Линии центров OO_1 и OO_2 проходят через точки касания соответствующих вписанных окружностей с исходной, поэтому

$$OO_1 = R - r_1,\ OO_2 = R - r_2,$$

где R — радиус большой окружности (рис. 2).

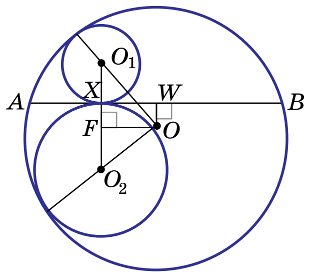


Рис. 2

Опустим перпендикуляры $OW = d$ на AB и OF на O_1O_2, тогда $OWXF$ — прямоугольник. Из треугольников OFO_1 и OFO_2 выразим OF^2, используя теорему Пифагора, и приравняем полученные выражения:

$$(R-r_1)^2-(r_1+d)^2=(R-r_2)^2-(r_2-d)^2.$$

После упрощения получим:

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{R-d}{R+d},$$

что и требовалось, так как последнее отношение не зависит от выбора точки X.

Приведем также решение участника конкурса *А.М. Пешнина* (г. Москва).

Обозначим большую окружность через ω и рассмотрим инверсию с центром A радиусом AX. Пусть B' — образ точки B при этой инверсии. Тогда образом ω будет прямая m, проходящая через B' и параллельная касательной к ω в точке A. Образом отрезка AB будет луч $[B'X)$.

Две малые окружности ортогональны окружности инверсии, поэтому перейдут сами в себя. Они будут вписаны в смежные углы, образованные прямой m с лучом $[B'X)$. Их радиусы равны $B'X\operatorname{tg}\alpha$ и $B'X\operatorname{ctg}\alpha$, если угол между AB и m равен 2α. Таким образом, отношение этих радиусов равно $\operatorname{tg}^2\alpha$ и не зависит от положения точки X.

Критерии проверки:

– приведено полное обоснованное рассуждение — 10 баллов;

– приведено в целом верное рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, — 8–9 баллов;

– задача не решена или решена неверно — 0 баллов.

4. (*Э.Г. Готман. Стереометрические задачи и методы их решения. — М.: МЦНМО, 2006.*) Найдите наибольшее значение отношения площади поверхности тетраэдра к сумме квадратов его ребер.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Решение. Докажем сначала, что если a, b и c — стороны треугольника, а S — его площадь, то

$$S \le \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}},$$

причем равенство достигается, если треугольник равносторонний.

По формуле Герона,

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

где p — полупериметр треугольника. По неравенству Коши для трех чисел,

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \le \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3}.$$

причем равенство достигается, если $a = b = c$. Тогда

$$S^2 \le p\cdot\left(\frac{p}{3}\right)^3, \quad S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

равенство достигается при том же условии.

Далее воспользуемся верным неравенством

$$3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2 = (2p)^2,$$

равенство в котором также достигается, если $a = b = c$.

Тогда

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{4}{3}p^2 \Leftrightarrow p^2 \le \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Таким образом,

$$S \le \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}},$$

что и требовалось.

Комментарий. Существуют и другие способы доказательства этого неравенства. См., например: *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, Физматлит, 1970.

Рассмотрим теперь тетраэдр, обозначив длины его ребер a, b, c, x, y, z. Запишем для каждой грани доказанное неравенство, после чего почленно сложим эти четыре неравенства. Учитывая, что каждое ребро принадлежит ровно двум граням, получим:

$$S_{\text{пов}} \le \frac{2a^2+2b^2+2c^2+2x^2+2y^2+2z^2}{4\sqrt{3}},$$

откуда отношение площади поверхности к сумме квадратов ребер не превосходит $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Равенство достигается, если каждая грань — равносторонний треугольник, то есть когда тетраэдр правильный.

Критерии проверки:

– приведено полное обоснованное рассуждение — 10 баллов;

– приведен верный ответ, но рассмотрены только частные случаи тетраэдров — 1–2 балла;

– задача не решена или решена неверно — 0 баллов.

5. (*А. Чеботарев, VIII Турнир математических боев им. А.П. Савина.*) В футбольном турнире участвовало n команд. Каждая из них сыграла с каждой один раз. Все матчи проходили на одном поле. Оказалось, что каждая команда в своем k-м матче забила k мячей. Какое наименьшее количество матчей могло закончиться вничью?

Ответ: два.

Решение. Первый и последний матчи неизбежно закончатся вничью, так как для обеих команд это будут матчи с одинаковым номером, поэтому меньше двух матчей не может закончиться вничью.

Покажем по индукции, что можно построить расписание матчей так, что остальные матчи не будут ничейными. Для трех команд любое расписание удовлетворяет этому условию.

Пусть такое расписание составлено для турнира, в котором n команд. Тогда для турнира, в котором $n + 1$ команда, поступим следующим образом: отыграем все матчи по расписанию для n команд, кроме последнего ничейного. Без ограничения общности можно считать, что несыгранным остался матч между командами с номерами 1 и 2. После этого $n + 1$ команда последовательно играет со второй, с третьей, ... с n-й, затем с первой. Ни в одной из этих встреч ничьей не будет, так как вторая команда будет играть матч с номером $n - 1$, а остальные команды, кроме первой, — с номером n, первая — с номером $n - 1$, в то время как для $n + 1$ команды это будут матчи с номерами 1, 2, ..., $n - 1$, n соответственно. Последним будет сыгран матч между первой и второй командами, который закончится вничью.

Комментарий. Доказать, что все матчи, кроме первого и последнего, не будут ничейными, можно иначе. Например, в работе Д.А. Рожновой, Л.С. Турилкиной (г. Пенза) задача сформулирована на языке теории графов, где вершинами графа являются команды, а ребрами — матчи, и проведено соответствующее рассуждение.

Критерии проверки:

– приведено полное обоснованное рассуждение — 10 баллов;

– приведено в целом верное решение, содержащее незначительные неточности (например, утверждается, что последний матч закончился со счетом $n : n$), — 9 баллов;

– доказано только, что ничейных матчей не меньше двух, — 2 балла;

– задача не решена или решена неверно — 0 баллов.

II. Методический блок

В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в условии «*задачи*», так и в «*ответе*» и «*решении*»). Если некорректно условие «*задачи*», то объясните, почему это так. Если неверно только «*решение*», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. (*Предложил А. Федулкин.*) «Задача». Найдите площадь треугольника ABC, в котором $BC = 5$, $\angle B = 15°$, а медиана CD образует со стороной AC угол 75°.

«Ответ»: 6,25.

«Решение». Рассмотрим окружность с центром O, описанную около данного треугольника, и продлим CD до пересечения с окружностью в точке E. Тогда

$$\angle ABE = \angle ACE = 75°,$$

поэтому $\angle CBE = 90°$, то есть CE — диаметр окружности (рис. 3).

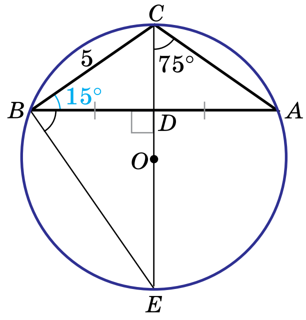


Рис. 3

Следовательно, ее центр O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB, то есть $OD \perp AB$. Значит, медиана CD данного треугольника совпадает с его высотой, поэтому $AC = BC = 5$, $\angle ACB = 150°$. Тогда

$$S_{ABC} = 0{,}5AC \cdot BC \cdot \sin 150° = 6{,}25.$$

Комментарий. Условие «*задачи*» корректно, а сам по себе текст «*решения*» ошибок не содержит, но рассмотрены не все случаи, а именно центр O описанной около треугольника ABC окружности может совпасть с точкой D, тогда угол ACB прямой. Следовательно,

$$AC = BC \cdot \operatorname{tg} 15° = 5\left(2 - \sqrt{3}\right);$$

$$S_{ABC} = 0{,}5AC \cdot BC = \frac{25\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2}.$$

Таким образом, задача имеет два ответа.

Критерии проверки:

– верно указано, что условие «задачи» корректно и в тексте «решения» ошибок нет, объяснено, почему есть второй случай, который верно разобран, — 10 баллов;

– указан и разобран второй случай, но приведенный в условии текст никак не охарактеризован, поэтому не ясно, почему нет еще случаев, — 8 баллов;

– указан и разобран второй случай и ошибочно доказывается, что случай, приведенный в «решении», невозможен, — 3 балла.

7. (*Предложил А. Шкловер.*) Витя ищет значения двух сумм:

1. $$C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n q^0,$$

где $p + q = 1$.

2. $$0C_n^0 p^0 q^n + 1C_n^1 p^1 q^{n-1} + 2C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + nC_n^n p^n q^0,$$

где $p + q = 1$.

Он нашел, что первая сумма равна 1, и перешел ко второму пункту. Его решение:

$$0C_n^0 p^0 q^n + 1C_n^1 p^1 q^{n-1} + 2C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + nC_n^n p^n q^0 =$$

$$= p \cdot \left(1C_n^1 p^0 q^{n-1} + 2C_n^2 p^1 q^{n-2} + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-2} q^1 + nC_n^n p^{n-1} q^0\right).$$

Выражение в скобках похоже на производную некоторого многочлена по переменной p:

$$\left(C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n q^0\right)' =$$

$$= 1C_n^1 p^0 q^{n-1} + 2C_n^2 p^1 q^{n-2} + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-2} q^1 + nC_n^n p^{n-1} q^0.$$

Но выражение в скобках — это выражение из пункта 1. Тогда

$$p \cdot \left(1C_n^1 p^0 q^{n-1} + 2C_n^2 p^1 q^{n-2} + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-2} q^1 + nC_n^n p^{n-1} q^0\right) =$$

$$= p\left(C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n q^0\right)' =$$

$$= p(1)' = p \cdot 0 = 0.$$

1) Предложите способ вычисления первой суммы.

2) Найдите ошибки при вычислении второй суммы и исправьте их, если это возможно.

3) Как можно интерпретировать заданные суммы с точки зрения теории вероятностей?

Комментарий. 1) Эта сумма равна $(p + q)^n = 1^n = 1$.

2) Равенство

$$\left(C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n q^0\right)' =$$

$$= 1C_n^1 p^0 q^{n-1} + 2C_n^2 p^1 q^{n-2} + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-2} q^1 + nC_n^n p^{n-1} q^0$$

действительно верно. А вот равенство

$$p\left(C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n q^0\right)' = p(1)'$$

неверно.

Чтобы взять производную, тождество должно быть корректным не только в точке, но и в окрестности (так как в производную «зашито» понятие предела). Но выражения в скобках равны, только если $p + q = 1$, что перестает быть верным при изменении значения p.

Для корректного взятия производной заметим, что

$$C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n q^0 = (p+q)^n$$

независимо от того, чему равна сумма p и q. Для этого выражения мы можем брать производную по p:

$$\left(C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n q^0\right)' =$$

$$= ((p + q)^n)' = n(p + q)^{n-1}.$$

После взятия производной можно подставить $p + q = 1$, что приведет к верному результату:

$$p \cdot \left(1C_n^1 p^0 q^{n-1} + 2C_n^2 p^1 q^{n-2} + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} p^{n-2} q^1 + nC_n^n p^{n-1} q^0\right) =$$

$$= p((p + q)^n)' = p \cdot n(p + q)^{n-1} = np.$$

3) Первое полученное равенство — это утверждение о том, что если кинуть монетку (необязательно симметричную) несколько раз, то хоть сколько-то решек выпадет (возможно, 0). Полученное значение второй суммы есть не что иное, как математическое ожидание для биномиального распределения.

Комментарий. Альтернативное решение для вычисления второй суммы можно получить, рассматривая функцию $(p + e^t q)^n$, дифференцируя ее по переменной t и подставляя затем значение $t = 0$. Это более общий способ, так как последовательное дифференцирование функции позволяет получать значения сумм, получающихся из умножения степеней натуральных чисел на биномиальные коэффициенты.

Критерии проверки (баллы суммируются):

– верно указан способ вычисления первой суммы — 2 балла;

– указано, что производная вычислена неверно, и объяснено почему — 2 балла;

– верно найдена производная — 2 балла;

– верно интерпретирована первая сумма — 2 балла;

– верно интерпретирована вторая сумма — 2 балла.

8. (*Предложил А. Эвнин.*) Учитель подбирает параметры a, b и c для условия следующей задачи так, чтобы она имела два различных решения.

Задача. Лодка прошла a км по течению реки и b км против течения, затратив на это столько же времени, сколько ей нужно, чтобы пройти в стоячей воде c км. Каково отношение собственной скорости лодки к скорости течения?

Подскажите учителю какой-либо подходящий набор целых значений указанных параметров так, чтобы оба решения задачи также были целыми. Подтвердите свой ответ выкладками.

Комментарий. Пусть скорость лодки в стоячей воде равна x км/ч, а скорость течения равна y км/ч. Тогда общий вид уравнения, удовлетворяющего условию задачи:

$$\frac{a}{x+y}+\frac{b}{x-y}=\frac{c}{x}.$$

Освободившись от знаменателей, которые должны принимать только положительные значения, и учитывая однородность полученного уравнения, получим уравнение

$$(a+b-c)t^2-(a-b)t+c=0,$$

где $t=\frac{x}{y}$. Дальнейший подбор параметров определяется тем, что это уравнение должно иметь два корня, оба больше единицы. Для этого необходимо (но не достаточно!) одновременное выполнение трех условий:

$$D=(a-b)^2-4c(a+b-c)>0,$$

$$t_1+t_2=\frac{a-b}{a+b-c}>2,$$

$$t_1t_2=\frac{c}{a+b-c}>2.$$

Получая из них разнообразные следствия, можно осуществить требуемый подбор.

Именно такой способ подбора искомых значений, включающий еще и соображения делимости, приведен в работе Д.А. Рожновой, Л.С. Турилкиной (г. Пенза). Это позволило получить четыре набора параметров (см. таблицу),

a	b	c	t
6	1	6	2; 3
10	3	12	3; 4
15	6	20	4; 5
21	10	30	5; 6

причем полученные отношения скоростей не противоречат реальности. Помимо этого, ими написана программа на языке Paskal, облегчающая поиск искомых значений.

Другой путь — идти от ответов, которые требуется получить. Если привести некоторые несложные рассуждения, например, связанные с четностью, и сузить полученную линейную систему уравнений относительно параметров a, b и c при помощи любой естественно возникающей линейной связки, то можно предложить учителю способ составления большого количества вариантов условия «задачи».

Такой подход показан в работе И. Эльмана (г. Москва). Введя обозначение $a+b-c=k$, из уравнения $(a+b-c)t^2-(a-b)t+c=0$, по теореме Виета, получены два равенства:

$$a-b=k(t_1+t_2),\ c=kt_1t_2.$$

Рассматривая их как систему линейных уравнений относительно a, b и c, получено:

$$a=\frac{k(t_1+1)(t_2+1)}{2},$$

$$b=\frac{k(t_1-1)(t_2-1)}{2},$$

$$c=kt_1t_2.$$

Подставляя в эти равенства такие целые числа t_1 и t_2, что $1<t_1<t_2$, и выбирая натуральные значения k, можно получить различные искомые наборы значений a, b и c (если t_1 и t_2 — четные, то k также четное).

Похожий способ решения изложен в работе А.А. Тимофеева и А.П. Челкак (г. Санкт-Петербург), где указано, что достаточно взять $k=1$. Кроме того, в этой работе уделено особое внимание реалистичности получаемых значений. Например, указано, что для $t_1=3$ и $t_2=5$ получаются такие значения: $a=12$, $b=4$, $c=15$. Тогда, если скорость течения равна, например, 2 км/ч, то скорость лодки равна 6 км/ч или 10 км/ч, что вполне реально.

Отметим, что особенно ценилось, если участники не только приводили целочисленные значения параметров, дающие требуемые различные целочисленные отношения скоростей, но и «помогали учителю» подобрать эти значения, то есть указывали какой-либо путь хотя бы частичного решения поставленной проблемы в общем виде.

Критерии проверки (баллы суммируются):

– приведен верный пример какого-либо набора требуемых параметров и проведена проверка — 2 балла;

– получена математическая модель (приведено уравнение в общем виде, возможно, дана ссылка на его однородность) — 2 балла;

– введена новая переменная — отношение скоростей; указано, что ее искомые значения целочисленные и больше 1, либо указано, что по смыслу задачи скорость течения можно (но необязательно!) брать, например, 1, 2 или 3 (то есть записано осмысленное условие, с помощью которого учителю будет проще находить значения параметров), — 1 балл;

– выписаны условия для дискриминанта, суммы и произведения корней — 1 балл;

– показан какой-либо разумный алгоритм, с помощью которого учитель сможет сам подбирать параметры для условия «задачи», например, дано указание на возможность поиска параметров исходя из искомых ответов — 3–5 баллов (в зависимости от полноты, обоснованности и простоты метода).

III. Аналитический блок

9. (*Предложил А. Блинков.*) В последние годы в образовательном процессе нашли широкое применение «Живая геометрия», Geogebra и другие подобные компьютерные программы. В каких видах учебной деятельности их использование уместно, а в каких не очень полезно, а возможно, и вредно? Обоснуйте свою точку зрения.

Комментарий. Мы постарались собрать весь спектр идей, представленных в работах участников конкурса. Сразу хочется отметить, что случаи, когда использование компьютерных программ уместно, в работах разных участников были похожи, а вот недостатки каждый находил свои. Поэтому если собрать все идеи вместе, то может показаться, что недостатков существенно больше, чем преимуществ. Так ли это на самом деле — каждый учитель решит для себя.

Начнем с очевидного. Программы динамической математики хороши для выполнения чертежей к задачам, для визуализации, например, трехмерных объектов, геометрических преобразований или задач с параметрами. Эти программы позволяют построить один чертеж и следить за ним в динамике; это удобнее, чем много чертежей для разных случаев в одной задаче. Стереометрические чертежи в Geogebra позволяют рассмотреть трехмерный объект с разных сторон и выбрать удачный ракурс для дальнейшего решения задачи.

Также в Geogebra можно представить сложный чертеж в компактной форме, а именно изображать чертежи, возникающие при решении задачи, «по шагам». Кроме этого, отметим, что с помощью таких программ удобно готовить материал для урока, на котором школьникам потребуется решать задачи на готовых чертежах. Также указанные программы хороши, если чертеж надо выполнить точно; легко построить, например, правильный десятиугольник, золотое сечение или отрезок длины корень из двух.

С помощью программ «Живой математики» учитель может демонстрировать ученикам идеи на готовых моделях, может сам построить необходимые ему модели, может предложить ученику провести исследование на готовой модели или создать себе модель для исследования задачи.

Такие программы позволяют быстро проверить гипотезу, которая появляется при решении той или иной задачи. Однако тут есть проблемы. Иногда неточность разрешения экрана сбивает на ложный путь: например, кажется, что три прямые пересекаются в одной точке, но если увеличить чертеж, то выяснится, что это не так.

Модель, созданная с помощью программы, может помочь продвинуться в сложной задаче, если ученик «застрял». У этого преимущества есть и оборотная сторона: если программа всегда будет подсказывать ученику идею решения задачи, когда он зашел в тупик, то это может помешать ему самому искать такие идеи. Но с третьей стороны, если у ученика появляется навык задавать себе вопрос «А как бы я построил такой чертеж в Geogebra», то это может научить его находить верное дополнительное построение и видеть дополнительные связи между элементами в той или иной конструкции.

Отдельно отметим, что такие программы существенно помогают учителю на дистанционных уроках. Также уроки с использованием указанных программ мотивируют учеников, делают уроки разнообразнее и интереснее.

Перечисленные выше достоинства встречались во многих работах. Перейдем теперь к более «уникальным» способам применения программы «Живая математика».

Модели в таких программах можно выдать ученику для самопроверки решения задачи, которую он решает традиционным способом. Также удобно их использовать для повторения или обобщения пройденной темы за короткое время. Эти программы дают возможность показать связь между алгеброй и геометрией. При построении геометрической фигуры Geogebra сразу пишет уравнения, которые ее задают. И наоборот, можно написать уравнение и визуализировать множество точек, ему удовлетворяющих. Geogebra помогает найти аналитические решения задачи. Но здесь же скрыт и недостаток: часто нужно научить решать задачу геометрически, а не сводить ее к системе уравнений.

При разборе ошибок часто требуется показать не только верное решение задачи, но и характерные ошибки и ложные пути. Тут мнения участников конкурса разделились: одни считали, что Geogebra позволяет быстро рассмотреть и ошибки тоже, другие — что Geogebra мешает нарисовать неправильный чертеж, а поэтому мешает демонстрировать ученикам возможные ошибки. Geogebra не позволяет и ученику ошибиться в чертеже. А как учить без ошибок?

Благодаря применению таких программ формулировки утверждений превращаются из заученных фраз в утверждения, которые можно проверить экспериментально. Дети учатся мыслить конструкциями, видеть связи между разными свойствами конструкции. Иногда исследование одной проблемы может натолкнуть их на новые факты, они увидят новую задачу, то есть такие программы могут научить школьников придумывать новые задачи.

С практической точки зрения некоторые участники предлагали в 5–6-х классах научить школьников пользоваться такими программами, тогда с 7-го класса можно вообще не уделять этому отдельного внимания, дети будут сами использовать программу там, где им нужно.

Теперь перейдем к недостаткам. Вот о чем участники конкурса писали больше всего: детям необходим навык рисования чертежей на бумаге, умение пользоваться циркулем и линейкой, они должны вырабатывать твердость руки и развивать мелкую моторику. Использование компьютера этому мешает, да еще и зрение портит.

Часто программа подсказывает ученику решение, а потом, например на контрольной работе, ему уже придется действовать самостоятельно. Иногда программа хорошо визуализирует некоторый факт, а иногда и полностью решает задачу, а это часто вредно. То есть если школьник будет использовать только динамические чертежи, он не научится сам решать задачи.

Иногда некоторые действия полезно сделать медленно, а не быстро. Когда учитель на доске объясняет решение по шагам и постепенно дорисовывает чертеж, ученикам проще понять, что происходит, чем когда программа мгновенно добавляет к чертежу нужные на этом шаге элементы. Кроме того, физические модели трехмерных объектов часто гораздо лучше визуализируют стереометрические факты, чем трехмерные чертежи.

Некоторые программы полностью строят графики функций за ученика. Получается, что процесс решения задачи заменяется на поиск готового ответа. Многие участники конкурса решительно высказались против тех программ, которые всю работу берут на себя.

Если, решая задачу, мы хотим облегчить некоторые рутинные действия, например, построив живой чертеж, рассмотреть сразу серию случаев, то применение программы полезно. Но если наша цель — это развивать мышление ученика, то для этого мозг надо загружать, а не облегчать его работу.

Таким образом, понятно, что применять программы динамической математики можно поразному. Можно найти много достоинств и недостатков их применения. От участников конкурса не требовалось приводить все возможные случаи удачного и неудачного применения Geogebra или «Живой математики». Кроме того, один и тот же способ применения программы может в некоторых случаях быть полезен, а в некоторых вреден. При проверке мы следовали логике участников конкурса и относили идею к той же категории, что и ее автор.

Критерии проверки (*баллы суммируются*):

– за каждую разумную идею полезности применения динамических программ — 1 балл (в сумме не больше 8 баллов);

– за каждый указанный разумный недостаток — 1 балл (в сумме не больше 2 баллов).

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию журнала. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам. Требования к оформлению статьи:

- Материал должен быть напечатан на компьютере или на пишущей машинке.
- Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.
- Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.
- Фотографии должны быть цветными. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 журнала.

«УЧЕБНЫЙ ДЕНЬ В МУЗЕЕ» ДЛЯ ДЕТЕЙ С ОВЗ

Г. АДЖЕМЯН,
adzhemyan@i.home-edu.ru,
г. Москва

Фото автора и с сайта gmik.ru

Подросток сегодняшнего дня живет в мире, перенасыщенном интересной информацией, которая поглощается им из разных источников. Его больше привлекает содержание, которое требует интеллектуальной активности, самостоятельных действий, расширяет кругозор. Каждая новая информация, поданная в виде задания или практической работы, всегда вызывает интерес. Сохранить этот интерес, укрепить его, развивать дальше — важнейшая задача и учителей, и родителей.

Организация «Учебного дня в музее» — один из путей решения данной задачи, которая дает уникальную возможность проводить уроки в экспозициях столичных музеев как очно, так и виртуально. «Учебный день в музее» — это не просто урок, это яркое событие, позволяющее устанавливать межпредметные связи и развивать метапредметные навыки обучающихся.

В данной статье речь идет об особенностях подготовки, организации и проведения «Учебного дня в Музее космонавтики». Учебный день был проведен в форме межпредметного урока математики, географии и русского языка с детьми в школе «Технологии обучения», где обучаются дети с ограниченными возможностями здоровья, в том числе и с интеллектуальными нарушениями.

В условиях современной жизни недостаточно ребенка просто обучать математике, литературе или другому предмету. Очень важно, чтобы ученики понимали, что все предметы взаимосвязаны, что знания разных предметов можно применять на практике, в жизни. Я.А. Коменский говорил: «Все, что находится во взаимной связи, должно преподаваться в такой же связи».

Эта задача ставилась, когда мы готовились к проведению виртуального урока-экскурсии в 5-м классе по теме «Прямолинейное движение» в Музее космонавтики.

Целью урока было не только выявить родство наук — математики, географии, окружающего мира, русского языка, но и проследить их взаимосвязь при знакомстве с видами прямолинейного движения, в прикладном значении формул вычисления пути, времени, скорости, в решении задач, стоявших перед отечественными инженерами на заре космической эры.

Урок проводился на платформе Zoom, у которой есть возможность объединить видеоконференцию, чат и мобильную совместную работу.

Технология проведения «Урока в музее» позволяет включать в урок эпизодически материал других предметов, но при этом сохраняется самостоятельность каждого предмета со своими целями, задачами, программой.

Зал «Утро космической эры. Спускаемый аппарат космического корабля «Восток»

Урок начался в зале «Утро космической эры».

Здесь учащимся было предложено ответить на вопросы:

- Как тема урока может быть связана с событиями 1957–1960 годов прошлого века?
- Как математика помогает исследователям космоса?

После обсуждения ответов учащиеся посмотрели видеофрагмент «Траектории движения космических аппаратов» (рис. 1) [2].

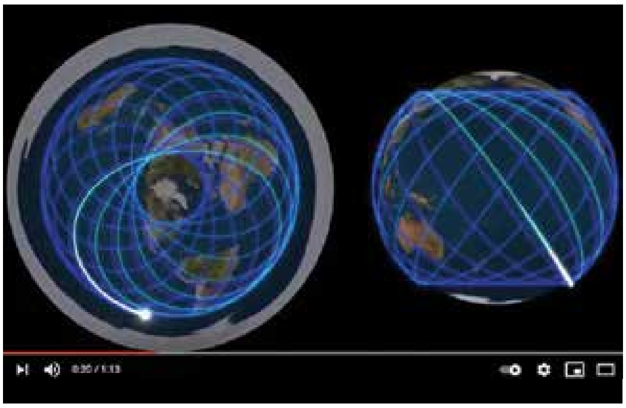


Рис. 1

Учащиеся узнали:

- космические аппараты летают по различным траекториям;
- любую траекторию полета можно условно разделить на небольшие участки прямолинейного движения;
- движение космического корабля или спутника рассчитывается по математическим формулам, известным всем как формулы движения, поэтому математика так важна для космонавтики. После обсуждения формул движения учащимся было предложено первое задание.

Задание 1. Кликните на ссылку «Формулы движения» [3] и выполните тест в программе learningApps.org (рис. 2).

После выполнения теста учащиеся познакомились с двумя скоростями движения космического аппарата: первой и второй космическими скоростями.

Первая космическая скорость — 8 км/с — это минимальная скорость, при которой тело, движущееся горизонтально над поверхностью Земли, не упадет на нее, а будет двигаться по круговой орбите.

Вторая космическая скорость — 11 км/с — это наименьшая скорость, которую необходимо придать космическому аппарату для преодоления притяжения Земли и для того, чтобы покинуть замкнутую орбиту вокруг нее.

Задание 2. Запишите значения космических скоростей в таблицу 1 [1].

Таблица 1

Первая космическая скорость (км/с)	
Вторая космическая скорость (км/с)	

Далее учащимся было предложено задание, направленное на развитее читательской грамотности при работе с научным текстом.

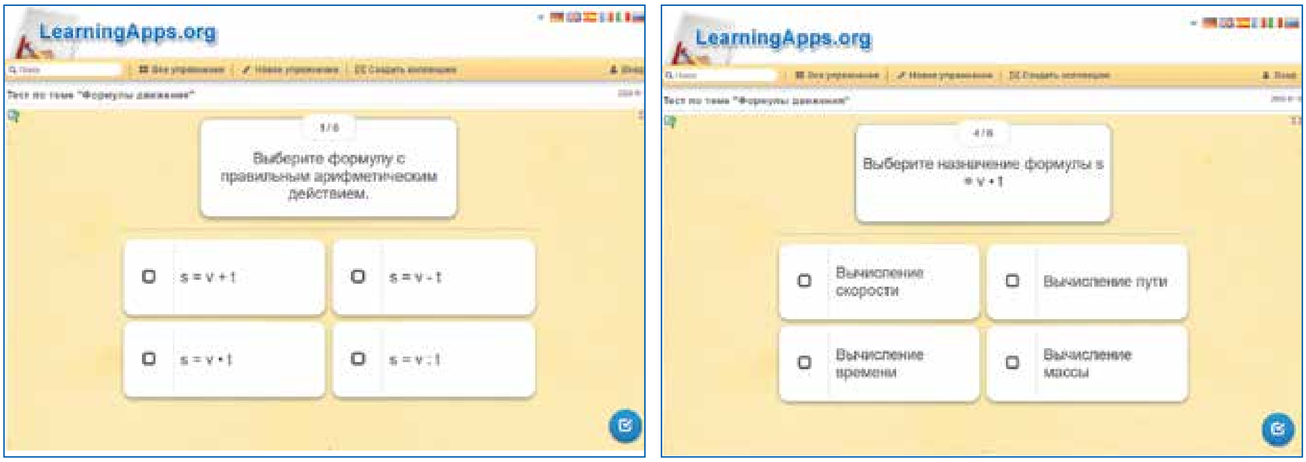


Рис. 2

Задание 3. Прочитайте текст о полете Ю.А. Гагарина и ответьте на вопросы таблицы 2.

Человек веками мечтал вырваться за пределы земной атмосферы и посмотреть на нашу планету из космоса. И вот, наконец, этот день настал. 12 апреля 1961 года с космодрома Байконур стартовал космический корабль «Восток» с пилотом-космонавтом Юрием Алексеевичем Гагариным на борту. Вскоре весь мир увидел кадры кинохроники: подготовка к полету, спокойное и сосредоточенное лицо Юрия Гагарина перед шагом в неизвестность, его знаменитое «Поехали!». Продолжительность полета Гагарина составила 108 минут. Всего 108 минут. Но не количество минут определяет вклад в историю освоения космоса. Юрий Гагарин был первым и останется им навсегда! Полет Юрия Гагарина по околоземной орбите стал возможен благодаря усилиям Сергея Павловича Королева — выдающегося конструктора и ученого, создавшего первый пилотируемый космический корабль «Восток-1», который доставил Гагарина на орбиту. Именно Королев сказал о Юрии Гагарине: «Он открыл людям Земли дорогу в неизвестный мир. Но только ли это? Думается, Гагарин сделал нечто большее — он дал людям веру в их собственные силы, в их возможности, дал силу идти увереннее, смелее...»

Для младшего подростка характерно исследовательское отношение к материалу. Они склонны интересоваться вопросами о глубоких причинах явлений, живо включаются в выдвижение и обсуждение различных точек зрения. Им интересно самим приходить к выводам и обобщениям, поэтому тема про полет первого человека в космос продолжилась в задании 4 при выполнении практической работы по математике.

Таблица 2

Вопрос	Ответ
1. Определите *тему* данного текста	
2. Определите *основную мысль* текста. (Можно скопировать из текста)	
3. Сколько *микротем* содержит данный текст? (Запишите число)	
4. Как вы поняли, в чем главная заслуга Юрия Гагарина? (Можно скопировать из текста)	
5. Отметьте *верные* утверждения словами ДА или НЕТ:	
а) Гагарин пробыл в космосе немногим более двух часов	
б) 12 апреля 1961 года под руководством С.П. Королева был произведен запуск первого беспилотного искусственного спутника Земли	
в) Юрий Гагарин был первым на Земле человеком, покинувшим земную атмосферу	
г) С.П. Королев создал первый пилотируемый космический корабль	
д) Космический корабль «Восток-2» доставил Юрия Гагарина на околоземную орбиту	

Задание 4. На космическом корабле «Восток-1» (рис. 3) полет Ю.А. Гагарина продлился 108 минут. Его можно разделить на три главных этапа: 1-й этап — старт ракеты и выведение космического корабля «Восток-1» на околоземную орбиту; 2-й этап — полет космического корабля «Восток-1» по орбите, в это время космонавт находился в состоянии невесомости; 3-й этап — спуск космонавта в спускаемом аппарате на Землю (рис. 4) [1].

В состоянии невесомости космонавт пролетел 26 400 км.

1. С какой скоростью летел космический корабль «Восток-1»?

2. Как долго находился космонавт в состоянии невесомости?

Дано: $s = 26\,400$ км, $v =$ ______.

Найти: t.

Решение. $t =$ ______.

Ответ: ______.

Рис. 3

Рис. 4

3. Вычислите расстояние, которое пролетел корабль «Восток-1» за: а) 5 с; б) 10 с; в) 1 мин (рис. 5)?

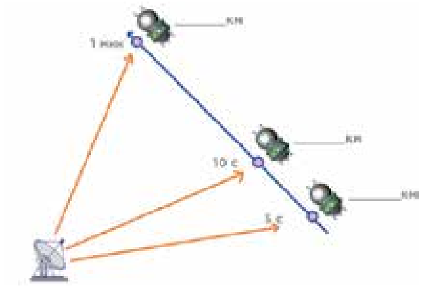


Рис. 5

4. Заполните таблицу 3.

Таблица 3

	v (км/ч)	t	s (км)
а)		5 с	
б)		10 с	
в)		1 мин	

Зал «Автоматическая межпланетная станция «Луна-1»

После выполнения задания 4 учащиеся перешли в следующий зал.

Для активизации познавательной деятельности учащихся предлагались наглядно-иллюстративные материалы и видеоролик про автоматическую межпланетную станцию «Луна-1», которая стала первым спутником Солнца. [7] Учащиеся увидели, как устроена ракета и автоматическая межпланетная станция «Луна-1» (рис. 6).

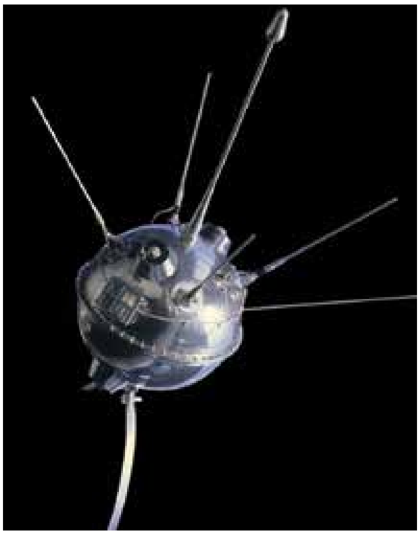


Рис. 6

Знакомясь с уникальными экспонатами, учащиеся узнали, что 2 января 1969 года был осуществлен пуск ракеты-носителя «Восток-Л», которая вывела на траекторию полета к Луне автоматическую межпланетную станцию «Луна-1». 4 января 1959 года «Луна-1» прошла на расстоянии 6000 километров от поверхности Луны и вышла на гелиоцентрическую орбиту. «Луна-1» стала первым в мире космическим аппаратом, достигшим второй космической скорости, преодолевшим притяжение Земли и ставшим искусственным спутником Солнца.

Задание 5. Сколько времени потребуется космическому аппарату, чтобы пролететь 480 км, если он летит с первой космической скоростью? со второй космической скоростью? Сколько времени затратила бы станция «Луна-1», преодолевшая расстояние от Земли до Луны, равное 384 тыс. км, если бы летела с постоянной скоростью 10 км/с? Заполните таблицу 4 [1].

Таблица 4

s	v	t
480 км		
480 км		
384 000 км		

Зал «Пилотируемая космонавтика. Стыковка космических кораблей «Союз-4» и «Союз-5»

Урок-экскурсия продолжился в зале «Пилотируемая космонавтика. Стыковка космических кораблей «Союз-4» и «Союз-5». Учащиеся узнали, что 16 января 1969 года была проведена первая в мире стыковка пилотируемых кораблей «Союз-4» и «Союз-5» и увидели видеофрагмент стыковки космических кораблей (рис. 7) [4].

Рис. 7

После просмотра видеофрагмента учащиеся в маршрутных листах выполнили лингвистическое задание.

Задание 6. Прочитайте задание и вставьте буквы С-З в приставки.

После прибытия космических кораблей «Союз-4» и «Союз-5» в ра...четную точку ...тыковки, они ра...вернулись друг другу навстречу. Корабли начали ...ближение с и...ходного ра...стояния 100 м. Космический корабль «Союз-4» играл «активную» роль и выполнял ...ближение на скорости 10 см/с (v_1), корабль «Союз-5» завис неподвижно и выполнял роль «мишени». Данный тип движения является движением навстречу друг другу (рис. 8).

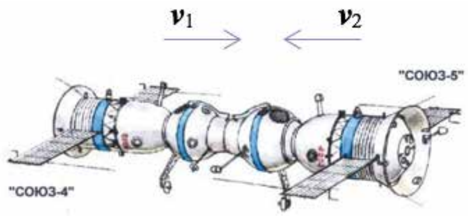


Рис. 8

После перехода двух космонавтов из космического корабля «Союз-5» в космический корабль «Союз-4» произошла их ра...стыковка. Данный тип движения является движением с удалением друг от друга (рис. 9).

Рис. 9

В завершении урока-экскурсии учащиеся посмотрели анимацию [4] про космос, из которой узнали, как устроена ракета, как ракету доставляют к месту старта и как ракета летит в космос.

Рефлексия

При проведении рефлексии в конце урока в маршрутном листе каждому ученику было предложено заполнить таблицу, в которой этапы урока были представлены в виде картинок. Они помогли детям актуализировать пройденный материал, выбрать понравившийся, запомнившийся, наиболее удачный для них этап урока и поставить рядом с ним знак «+».

Подводя итоги урока, дети отметили, что такая форма проведения урока им очень понравилась. Экскурсия была интересная и увлекательная. Они увидели, как разные науки тесно связаны друг с другом, и убедились в необходимости для космических исследований не только математических знаний, но и знаний русского языка, физики и астрономии.

«Учебный день в музее» в виде межпредметного урока помог пробудить интерес учащихся 5-го класса и к физике, и к астрономии, тем самым подтверждая неразрывную связь математики с предметами естественно-научного цикла и создавая основу для дальнейшего изучения этих предметов.

Источники информации

1. Режим доступа. — https://kosmo-museum.ru/static_pages/muzey-uchitelyu. **2.** Режим доступа. — https://yandex.ru/video/preview/?text=видеофрагмент%20«Траектории%20движения%20космических%20аппаратов»&path=wizard&parent-reqid=1623767764400477-15884858204431912516-balancer-knoss-search-yp-sas-29-BAL-2482&wiz_type=vital&filmId=9639670719601968895. **3.** Режим доступа. — https://learningapps.org/display?v=prkwjhnu520. **4.** Режим доступа. — https://www.youtube.com/watch?v=pE2d9WIOpnk. **5.** Режим доступа. — http://gagarin-gazeta.ru/wp-content/uploads/2017/08/Korabl---Vostok----posle-otdeleniya-tretey-stupeni-raketyi-nositelya.jpg. **6.** Режим доступа. — http://portal.rusarchives.ru/12april/pages/02_70.php. **7.** Режим доступа. — https://ru.wikipedia.org/wiki/Луна-1#/media/Файл:RIAN_archive_510848_Interplanetary_station_Luna_1_-_blacked.jpg. **8.** Режим доступа. – https://www.youtube.com/watch?v=TZNXGienxu4.

Г. ЛЕВИТАС,
г. Москва

СРАЗУ ПОСЛЕ ОГЭ

Толя сдал ОГЭ на четверку. И Людмила Ивановна была недовольна.

– Вот видишь! — выговаривала она внуку. — Я тебе еще в восьмом классе говорила: готовься. А ты отложил все на последний год. Вот и вышло как обычно. Знал почти на пять, а получил четыре. Чтобы получать пятерки, надо знать почти на шесть! И к ЕГЭ готовиться надо прямо сейчас.

– Как же я могу готовиться к ЕГЭ? Там ведь материал старших классов, — недоумевал Толя.

– Можно подумать, что тебя подвели знания за последний год. Ты, например, плохо решаешь текстовые задачи, а этим заниматься можно когда угодно.

– И ты меня за эти два года научишь решать текстовые задачи?

– Нет, не научу. Но познакомлю с большим количеством таких задач, и вероятность того, что ты на ЕГЭ столкнешься с уже знакомой задачей, будет намного выше. Особенно плохо у тебя то, что ты не умеешь анализировать условие. Ты всегда рассуждаешь от условия к заключению, а часто бывает полезно использовать обратный ход. Так вот сегодня я дам тебе задачу, при решении которой будет нужно все время помнить не только то, что дано, но и то, что требуется найти.

Людмила Ивановна включила компьютер, зашла на сайт alexlarin.com и распечатала условие задачи.

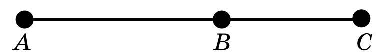
11. На участке реки от A до B течение так невелико, что им можно пренебречь; на участке от B до C течение оказывает заметное влияние на движение лодки. Лодка покрывает расстояние вниз, от A до C, за 6 ч, а вверх, от C до A, за 7 ч. Если бы на участке от A до B течение было таким же, как на участке от B до C, то весь путь от A до C занял бы 5,5 ч. Сколько часов в этом случае понадобилось бы той же лодке на движение вверх, от C до A? Собственная скорость лодки принимается неизменной во всех случаях.

– Ты посмотри. И когда что-нибудь придумаешь, продолжим.

Спустя некоторое время Толя подошел к бабушке.

– Я составил уравнения. Но их три, а неизвестных четыре.

И внук предъявил свои записи, которые выглядели так:



$$AB = s_1,\ BC = s_2;$$

x — скорость лодки, v — скорость течения;

$$\frac{s_1}{x}+\frac{s_2}{x+v}=6,\quad \frac{s_1}{x}+\frac{s_2}{x-v}=7,\quad \frac{s_1}{x+v}+\frac{s_2}{x+v}=5{,}5.$$

– У тебя правильное понимание условий. Но ты не видишь конца задачи. Даже не написал, что надо искать. Так все-таки, что требуется найти?

И Толя дописал: найти $\frac{s_1+s_2}{x-v}$.

– Ну вот видишь, не нужно тебе искать четыре неизвестных в трех уравнениях. А нужно найти отношение некоторых величин. Тебя учили решать системы уравнений?

– Да, кажется, в седьмом. Мы решали системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

– И учили разным методам решения? Каким?

Толя ответил сразу:

– Графический, подстановка и сложение.

– А теперь подумаем: не напоминают ли тебе первые два уравнения то, о чем вы говорили в 7-м классе.

– Тут тоже два неизвестных: s_1 и s_2. Но ведь еще и x, и v.

– А ты взгляни в конец. Что требуется? Давай выразим s_1 и s_2 через x и v из первых двух уравнений, а потом из третьего уравнения выразим x через v или наоборот. И подставим в искомую дробь. Авось что-нибудь и сократится.

– Авось?

– А как же! Надо пробовать!

– Ладно. А как решать такую систему?

– Ты же сам говорил про три метода!

И Толю осенило:

– Если методом сложения, то s_1 сразу исключается; я вычту из второго уравнения первое.

– Ну конечно!

Толя написал:

$$\frac{s_2}{x-v}-\frac{s_2}{x+v}=1,$$

$$s_2\frac{x+v-x+v}{x^2-v^2}=1,\ s_2=\frac{x^2-v^2}{2v}.$$

– А теперь s_1! — подбодрила Людмила Ивановна.

– Это из первого уравнения, — ответил Толя. И продолжил:

$$\frac{s_1}{x}=6-\frac{s_2}{x+v}=6-\frac{x^2-v^2}{2v(x+v)}=6-\frac{x-v}{2v}=\frac{13v-x}{2v},$$

$$s_1=\frac{13vx-x^2}{2v}.$$

– А теперь что? — спросил он.

– Как что? Загляни в конец! Что искать-то надо? Да и третье уравнение не использовано!

– А! Из него выразим x через v!

– Разумеется! Решай!

И Толя написал:

$$s_2+s_2=\frac{13vx-x^2+x^2-v^2}{2v}=\frac{13x-v}{2},$$

$$\frac{s_1}{x+v}+\frac{s_2}{x+v}=5{,}5,$$

$$\frac{s_1+s_2}{x+v}=5{,}5,$$

$$\frac{13x-v}{2(x+v)}=5{,}5,$$

$$13x-v=11x+11v,$$
$$x=6v.$$

– А дальше?

– Смотри в конец! Что искать надо?

Толя вздохнул и закончил:

$$\frac{s_1+s_2}{x-v}=\frac{13x-v}{2(x-v)}=\frac{78v-v}{2\cdot 5v}=7{,}7.$$

– Ну, видишь? Все время поглядывать на вопрос задачи — очень полезное дело. Вот тебе сборник тренировочных задач для подготовки к ЕГЭ за прошлый год. Задание: прорешать все задачи на движение. И оформить все четко: номер варианта, номер задачи, что и какими буквами обозначил, уравнение, ответ. Если ответ совпал с данным в книге, то знак плюс. Как только наберется три задачи, которые не смог решить или ошибся, — сразу ко мне. Будем разбираться! Договорились?

И Людмила Ивановна вручила внуку книгу под редакцией И.В. Ященко «ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов» 2020 года издания.

Окончание. Начало на с. 28.

На втором проверяемом числе получим пару (28; 96), на которой достигается значение $w = 1292$.

5. Свойства решений уравнения (6б) позволяют прояснить, как продолжить решение задачи, в котором получена оценка $w \le 1300$. Поскольку $p_0 \vdots 4$ и $q_0 \vdots 4$, то из уравнения (6а) следует $w \vdots 4$. Таким образом, необходимо проверить подстановкой в уравнение (2) значения w, кратные 4 и удовлетворяющие неравенству $1260 < w < 1300$, всего не более 9 чисел. Производя перебор по убыванию w, уже на втором числе $w = 1292$ получим, что один из корней уравнения (2) является натуральным числом: $p = 28$, и из (6б) находим $q = 96$.

6. В заключение отметим, что и на учителе, и на авторах решений из любых обучающих источников лежит ответственность за формирование у учащихся понимания характера рассматриваемых задач. Это задачи на решение систем уравнений вида (1) в натуральных числах. Отсюда вытекает и необходимость владения методами соответствующего раздела математики. Умение же в некоторых частных случаях найти решение методами других разделов, безусловно, полезно, но отражает всего лишь уровень освоения этих разделов, а не того, к которому действительно относятся задачи, — теории чисел.

К. ГОРШЕНИН,
г. Москва

Примеры таких задач и их решения можно найти на сайте ege.sdamgia.ru

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЕГЭ НА ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР

Рассматриваемая разновидность задач

Среди задач ЕГЭ на оптимальный выбор выделяется ряд задач, приводящих к системе уравнений в переменных p и q с натуральными значениями параметров a, b, c:

$$\begin{cases} ap+bq=w, & \text{(1а)} \\ p^2+q^2=c, & \text{(1б)} \end{cases} \qquad (1)$$

и имеющих целью найти наибольшее значение параметра w, при котором система (1а, 1б) (далее будем называть ее системой (1)) имеет решения в натуральных числах. Предлагаемые решения основаны на поиске оценки для w; если найденная оценка имеет натуральное значение и достигается при натуральных значениях переменных, она и является решением задачи.

Для поиска оценки предполагается, что уравнения (1) определены на множестве $(0;\sqrt{c}) \times (0;\sqrt{c})$ положительных действительных пар $(p; q)$. Самой оценкой будет наибольшее значение w (вообще говоря, действительное), при котором система (1) имеет хотя бы одно решение. На упомянутом сайте можно найти различные способы нахождения этого значения.

Способ 1. Выразим q из уравнения (1а) и подставим в (1б), получим уравнение

$$(a^2+b^2)p^2 - 2awp + w^2 - b^2c = 0. \qquad (2)$$

Оно имеет решения, если неотрицателен его дискриминант

$$D = 4\cdot(a^2+b^2)\cdot b^2c - 4b^2w^2.$$

Следовательно, наибольшее возможное значение w равно

$$w_{\max} = \sqrt{(a^2+b^2)c}. \qquad (*)$$

Подставляя его в уравнение (2), находим, что это значение достигается при

$$p_{\max} = a\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}}, \qquad (**)$$

а тогда из (1б) получаем:

$$q_{\max} = b\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}}. \qquad (***)$$

Способ 2. Выразим q из уравнения (1б), подставим в (1а) и рассмотрим функцию

$$w(p) = ap + b\sqrt{c-p^2},$$

определенную на промежутке $\left(0;\sqrt{c}\right)$. Значение производной $w'(p)$ равно 0 в точке (**), причем слева от $p_{\max}$ производная положительна, а справа — отрицательна. Поэтому $p_{\max}$ — точка максимума функции $w(p)$,

$$w_{\max} = w(p_{\max}) = \sqrt{(a^2+b^2)c}.$$

Подставив $p_{\max}$ в (1б), найдем (***).

Способ 3. Решения уравнения (1б) можно параметризовать:

$$p=\sqrt{c}\cos\varphi,\quad q=\sqrt{c}\sin\varphi,\quad \varphi\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда из (1а) находим:

$$w=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)c}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\varphi+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\varphi\right)=$$

$$=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)c}\,\sin\left(\varphi+\varphi_0\right),$$

где

$$\sin\varphi_0=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi_0=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Отсюда следует, что наибольшее возможное значение w равно (*) и достигается оно при $\varphi=\varphi_{\max}=\frac{\pi}{2}-\varphi_0$, чему соответствуют значения (**) и (***).

Способ 4. На плоскости (p; q) уравнение (1б) на области определения задает дугу окружности радиусом $\sqrt{c}$ с центром в начале координат, а уравнение (1а) — отрезок прямой с угловым коэффициентом $\left(-\frac{a}{b}\right)$. Наибольшее значение w достигается, если прямая является касательной к окружности. Так как касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, то последняя лежит на прямой $q=\frac{bp}{a}$. Поэтому точка касания — это точка пересечения прямой $q=\frac{bp}{a}$ и дуги окружности, имеющая координаты

$$\left(a\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}};\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}}\right).$$

Подставляя их в (1а), получим (*).

Выясним, при каких условиях значения $w_{\max}$, $p_{\max}$, $q_{\max}$ являются натуральными числами. Если сумма a^2+b^2 не является квадратом, то нужно положить

$$c=\lambda^2\left(a^2+b^2\right),\ \lambda\in N. \qquad (3)$$

Пусть a^2+b^2 является квадратом, тогда $w_{\max}$ — натуральное число, если c — квадрат натурального числа:

$$\sqrt{c}\in N. \qquad (4)$$

Для получения натуральных значений $p_{\max}$ и $q_{\max}$ этого недостаточно: должно быть выполнено соотношение (3).

Решения, предлагаемые на сайте ege.sdamgia.ru, обладают следующими недостатками. Во-первых, в них отсутствует четкая формулировка математической модели задачи. Во-вторых, в них не упоминается о намерении найти не саму требуемую величину, а ее оценку сверху. В результате решение выглядит как шаблонная последовательность действий, обеспечивающая достижение цели. Между тем ученик должен ясно понимать, что алгоритм, основанный на поиске оценки, дает ответ не на вопрос задачи, а на вопрос: может ли полученная оценка быть решением задачи? Положительный ответ на него, как следует из предыдущих рассуждений, возможен лишь при специально подобранных числовых значениях параметров задачи. Разумеется, ученик не должен проводить такой анализ. Но он должен понимать, что предлагаемый подход, при всем разнообразии методов получения оценки, не является универсальным способом нахождения решения.

Отметим, что из всех рассмотренных способов поиска $w_{\max}$ только в четвертом пункте и частично во втором невозможно пропустить этап вычисления $p_{\max}$ и $q_{\max}$.

Далее мы рассмотрим задачу, в различных вариантах которой оценка может являться, а может и не являться решением.

Задача о двух заводах

На двух заводах в разных городах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно m^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят am единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно m^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят bm единиц товара ($b>a$). На каждом из заводов владелец платит рабочему r рублей за каждый час работы. Он готов выделять s рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Такая задача со значениями $a=3$, $b=4$, $r=500$, $s=5\,000\,000$ предлагалась на ЕГЭ-2015. Ее решение можно найти на сайте ege.sdamgia.ru (далее будем называть ее экзаменационной). Аналогичная задача со значениями $a=5$, $b=12$, $r=300$, $s=3\,000\,000$ предложена в сборнике «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2021. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2021 года» под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова (далее будем называть ее тренировочной). К ней дан ответ: 1300. Ответ является неверным, хотя это число в данной задаче имеет как раз смысл оценки.

Условие задачи обладает рядом особенностей, которые, по опыту автора этой статьи, могут вызывать у учащихся трудности в понимании рассматриваемой ситуации. Выражения «одинаковые товары» и «единица товара» следует расценивать как указание на то, что количество произведенной продукции выражается натуральным числом, однако это не всегда очевидно для учащихся. Еще менее определенно в условии сказано о том, что работают два завода. В результате ученик может сделать вывод: наибольшее количество единиц товара будет произведено, если работает только второй завод (из условия следует, что за одинаковое время большее количество продукции производят именно там). Разумеется, на этот вывод влияет привычка к «задачам на работу» с постоянной во времени производительностью труда. Однако в нашей задаче средняя по времени производительность рабочего на каждом заводе обратно пропорциональна квадратному корню из суммарного рабочего времени (что невозможно при постоянной «мгновенной» производительности), поэтому вывод о том, что второй завод всегда работает эффективнее, попросту неверен.

Заметим, что такая ситуация выглядела бы более естественной применительно, например, к обрабатывающим станкам, у которых падение производительности обусловлено вполне понятным износом деталей, непосредственно соприкасающихся с обрабатываемым материалом (сверло, резец и т.п.).

Решение, предложенное на сайте для экзаменационной задачи, использует первый способ нахождения оценки. В результате выясняется, что наибольшее возможное значение $w_{max} = 500$ достигается при $p_{max} = 60$ и $q_{max} = 80$. Решая таким же образом тренировочную задачу, получим наибольшее значение $w_{max} = 1300$, достигающееся при $p_{max} = \frac{500}{13}$ и $q_{max} = \frac{1200}{13}$. Понятно, почему во втором случае при натуральном значении w_{max} не являются натуральными значения p_{max} и q_{max}: в экзаменационной задаче выполнено условие (3), а в тренировочной — только условие (4). Это означает, что найденная оценка не является решением задачи, поиск которого, следовательно, необходимо продолжить. Самым очевидным способом является: последовательно проверять натуральные значения $w < 1300$ (по убыванию), подставляя их в уравнение (2), пока не будут получены натуральные значения p и q. Однако не ясно, сколько чисел придется проверить и найдется ли вообще подходящее значение w.

Решение без поиска оценки

Рассмотрим другой путь решения тренировочной задачи, не связанный с поиском оценки. Еще раз подчеркнем, что ключевыми элементами ситуации мы считаем два: работают оба завода и количество товара, произведенное на каждом, выражается натуральным числом.

Пусть на первом заводе произведено x, на втором — y, всего — w единиц товара. Согласно условию, величины $\left(\frac{x}{5}\right)^2$ и $\left(\frac{y}{12}\right)^2$ — рабочее время, затраченное на каждом из этих заводов, суммарное время равно 10 000. Тогда имеем систему уравнений относительно переменных x и y:

$$\begin{cases} x+y=w, & \text{(5а)} \\ \left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{12}\right)^2=10\,000, & \text{(5б)} \end{cases} \qquad (5)$$

$$0 < x < 500,\ 0 < y < 1200,\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N},$$

задача сводится к поиску наибольшего значения параметра w, при котором система (5) имеет хотя бы одно решение $(x;\ y)$ в натуральных числах. Для этого необходимо найти все натуральные решения уравнения (5б) и, подставляя их в (5а), выяснить, когда достигается наибольшее значение w (которое автоматически получается натуральным).

Уравнение (5б) можно переписать в виде

$$12^2x^2 + 5^2y^2 = 5^2 \cdot 12^2 \cdot 10\,000,$$

откуда, с учетом взаимной простоты чисел 5 и 12, следует: если есть целое решение $(x_0;\ y_0)$, то $x_0 \vdots 5$ и $y_0 \vdots 12$.

Перейдем в (5) к переменным $p = \frac{x}{5}$ и $q = \frac{y}{12}$:

$$\begin{cases} 5p+12q=w, & \text{(6а)} \\ p^2+q^2=10\,000, & \text{(6б)} \end{cases} \qquad (6)$$

$$0 < p < 100,\ 0 < q < 100,\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}.$$

В левой части (6б) стоит симметрический многочлен от двух переменных. Поэтому если пара $(p_0;\ q_0)$ является решением этого уравнения, то решением является и пара $(q_0;\ p_0)$.

Поскольку правая часть уравнения (6б) кратна 16, выясним, какие остатки дает при делении на 16 квадрат натурального числа: $n^2 = 16j + k$, $0 \le k \le 15$. Положим: $n = 4i + l$, $0 \le l \le 3$. Тогда

$$n = 16i^2 + 8il + l^2.$$

Если $l = 0$, то $k = 0$; если $l = 2$, то $k = 4$.

Далее рассмотрим оставшиеся значения l (1 и 3). Если i — четное число, то $k = l^2$ и $k \in \{1; 9\}$. Если i — нечетное, то k равно остатку от деления на 16 выражения $8l + l^2$, поэтому $k \in \{1; 9\}$. Окончательно: $k \in \{0; 1; 4; 9\}$.

Выпишем возможные остатки от деления на 16 выражения $p_0^2 + q_0^2$:

Остатки p_0^2 \ Остатки q_0^2	0	1	4	9
0	0	1	4	9
1	1	2	5	10
4	4	5	8	13
9	9	10	13	2

Как видно, для любой натуральной пары $(p_0; q_0)$ остаток от деления на 16 выражения $p_0^2+q_0^2$ может быть равен 0 только в том случае, когда остаток от деления на 16 каждого слагаемого равен 0, то есть при p_0 и q_0, кратных 4.

Перейдем в (6) к переменным $u=\dfrac{p}{4}$ и $v=\dfrac{q}{4}$:

$$\begin{cases} 20u+48v=w, & (7а)\\ u^2+v^2=625. & (7б)\end{cases} \qquad (7)$$

Число 625 при делении на 16 дает остаток 1. Для любой натуральной пары $(u_0; v_0)$ — решения уравнения (7б) — остаток от деления на 16 выражения $u_0^2+v_0^2$ может быть равен 1 только в том случае, когда остаток от деления на 16 одного слагаемого равен 0, а другого — 1. Выпишем все возможные квадраты натуральных чисел n, кратные 16 и не превышающие 625. Таких квадратов будет шесть, поскольку $\left[\dfrac{625}{16}\right]=39$, а ближайший к 39 снизу квадрат — это $36 = 6^2$.

Найдем и соответствующие значения выражения $625 - n^2$:

n^2	16	64	144	256	400	576
$625-n^2$	609	561	481	369	225	49

Два значения во второй строке этой таблицы являются квадратами натуральных чисел: 225 и 49. Поэтому существует четыре натуральных решения уравнения (7б): пары (20; 15), (15; 20), (24; 7), (7; 24). Подставляя их в уравнение (7а), получим, что наибольшее значение, которое принимает w, равно 1292, и достигается оно при значениях исходных переменных $x = 140$ и $y = 1152$.

Замечания

1. Переход от уравнения (5б) к (6б) не просто замена переменных, позволяющая упростить запись. Тот факт, что $x_0 \vdots 5$ и $y_0 \vdots 12$, позволяет утверждать, что количество целых решений уравнений (5б) и (6б) одинаково. Такое же замечание относится и к переходу от уравнения (6б) к (7б).

2. Решение уравнения (6б) было проведено с использованием стандартных методов теории делимости, рассматриваемых в учебниках математики профильного уровня. Это решение может выглядеть более простым, если привлечь дополнительные сведения из теории чисел, не упоминаемые в школьных учебниках.

Натуральные числа α, β и γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ образуют пифагорову тройку, если $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$. Известно, что число γ может быть старшим членом тройки тогда и только тогда, когда оно имеет простой делитель, дающий при делении на 4 в остатке 1. В любой пифагоровой тройке хотя бы одно из чисел α и β кратно 4.

В правой части уравнения (6б) стоит квадрат числа 100, имеющего делитель 5, а $5 \equiv 1 \pmod 4$. Поэтому (6б) имеет не менее двух натуральных решений: $(p_0; q_0)$ и $(q_0; p_0)$, — и одна из троек: $(p_0; q_0; 100)$ или $(q_0; p_0; 100)$, является пифагоровой. Поскольку $100 \vdots 4$, то $p_0 \vdots 4$ и $q_0 \vdots 4$, что и позволяет перейти к системе (7). В свою очередь, в правой части уравнения (7б) стоит квадрат числа 25, поэтому (7б) имеет не менее двух натуральных решений, и одна из троек: $(u_0; v_0; 25)$ или $(v_0; u_0; 25)$, является пифагоровой. Поскольку 25 не кратно 4, то лишь одно из чисел: u_0 или v_0, кратно 4. Далее, как и было сделано, перебором ищем значения $n \vdots 4$, при которых значения выражения $625 - n^2$ являются квадратами.

3. Необязательно находить значения w, соответствующие обеим парам $(u_0; v_0)$ и $(v_0; u_0)$ — решениям уравнения (7б). Поскольку

$$(20u_0 + 48v_0) - (20v_0 + 48u_0) = -28(u_0 - v_0),$$

то при $u_0 < v_0$ большее значение w достигается на паре $(u_0; v_0)$.

4. Предложенный в предыдущем разделе путь позволяет найти все решения системы (7), значит, и систем (6), (5). Можно поступить иначе. Уравнение (6б) имеет очевидные решения (60; 80) и (80; 60), которым соответствуют $w = 1260$ и $w = 1120$. Из системы (6) следует, что

$$w=5\sqrt{10\,000-q^2}+12q.$$

Рассмотрим функцию

$$f(\xi)=5\sqrt{10\,000-\xi^2}+12\xi,$$

определенную на промежутке (0; 10 000). Она имеет максимум в точке $\xi_{\max}=92\dfrac{4}{13}$. Поэтому нужно выяснить, существуют ли натуральные решения $(p_0; q_0)$ уравнения (6б), для которых

$$80<q_0<98\frac{158}{169}$$

(правая и левая части этого неравенства — корни уравнения $f(\xi) = 1260$). Если да, то для них $w > 1260$. Проверим подстановкой в (6б) четыре возможных значения q_0, кратные 4: 84, 88, 92 и 96, — порождают ли они натуральную пару $(p_0; q_0)$, причем в порядке возрастания величины $|q_0-\xi_{\max}|$: 92, 96, 88, 84.

Окончание на с. 27.

ЗАДАЧИ О ТРАПЕЦИЯХ

Е. ИВАНОВА,
г. Москва

Прошло лето, и снова уроки. А у учителей девятых классов особая забота: подготовить ребят к ОГЭ.

А не начать ли эту работу сразу, с начала сентября?

А с чего ее начать?

Да с самого трудного — с задач по геометрии.

Но как объяснить это детям? Ведь дидактика требует наоборот: от простого к сложному!

А так и сказать: давайте максимально использовать время, пока еще не заполненное текущими трудностями.

Возьмем какую-нибудь одну большую тему и прорешаем на уроках задачи разных уровней трудности по ней. Например, тема «Трапеции». Она, как губка, вобрала в себя знания и о треугольниках, и о параллелограммах, и об окружностях. Итак, берем задачи о трапециях из материалов для подготовки к ОГЭ прошлого учебного года и показываем их.

Даем условия задач домой. Подумать, сделать чертеж, выдвинуть соображения. А кто решит — сразу пятерка в журнал. Потом, на уроке, —постепенно или сразу — решение. И тут же просьба рассказать решение разобранной задачи другому ученику или учителю, а при выполнении этой просьбы — оценка в журнал. И каждый раз с анализом решения: какие знания нам понадобились.

Вот список необходимых теорем, которые, как правило, используются при решении таких задач.

– Свойство смежных углов.
– Свойство вертикальных углов.
– Признаки равенства треугольников.
– Свойства и признаки равнобедренного треугольника.
– Свойства и признаки параллельных прямых.
– Сумма углов треугольника.
– Свойства и признаки параллелограмма.
– Свойства трапеции.
– Свойства и признаки равнобедренной трапеции.
– Определение и свойства прямоугольника.
– Свойства средней линии трапеции.
– Геометрические места точек (ГМТ) — серединный перпендикуляр, биссектриса, окружность.
– Теорема Пифагора, прямая и обратная.
– Свойство медианы прямоугольного треугольника.
– Свойство касательной к окружности.
– Свойства хорды, перпендикулярной к диаметру.
– Признаки подобия треугольников.
– Отношение площадей подобных фигур.
– Свойство отрезков секущих и касательной.
– Стороны прямоугольного треугольника с углами 30° и 60°.
– Формулы площади треугольника и трапеции.
– Сумма углов четырехугольника.

А вот примерная подборка задач.

1. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 4$, $BC = 2$.

Решение. (*Дополнительное построение — продолжить боковые стороны трапеции.*) Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке M (рис. 1).

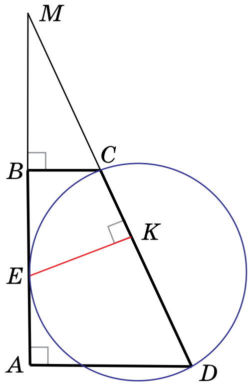


Рис. 1

Чтобы найти расстояние от точки E до прямой CD, опустим перпендикуляр из точки E на прямую CD. После этих дополнительных построений образовались подобные треугольники: прямоугольные с общим острым углом M.

Из подобия треугольников AMD и BMC с коэффициентом подобия $k = 2$ следует, что

$$MD = 2MC.$$

А поскольку ME — касательная, то

$$ME^2 = MC \cdot MD = MC \cdot 2MC = 2MC^2,$$
$$ME = \sqrt{2}MC.$$

Из подобия треугольников MEK и MDA следует, что

$$\frac{ME}{MD} = \frac{EK}{AD} \text{ или } \frac{\sqrt{2}MC}{2MC} = \frac{EK}{4}, \quad EK = 2\sqrt{2}.$$

2. В трапеции $ABCD$ биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD. Докажите, что точка K равноудалена от прямых AD, AB и BC.

Доказательство. Опустим из точки K перпендикуляры KH_1, KH_2 и KH_3 соответственно на прямые BC, AD и AB (рис. 2).

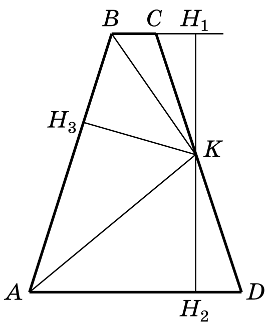


Рис. 2

$$KH_1 = KH_3,$$

так как BK — биссектриса угла B;

$$KH_2 = KH_3,$$

так как AK — биссектриса угла A, следовательно,

$$KH_1 = KH_3 = KH_2$$

и точка K равноудалена от прямых AD, AB и BC.

Возможно и другое решение (рис. 3).

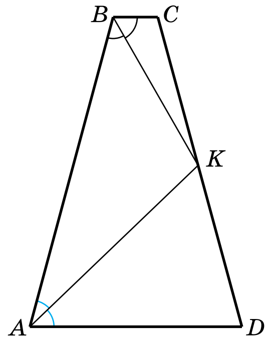


Рис. 3

Точка K принадлежит биссектрисе AK, поэтому она равноудалена от прямых AD и AB.

Точка K принадлежит биссектрисе BK, поэтому она равноудалена от прямых AB и BC.

Из этих двух утверждений следует, что точка K равноудалена от прямых AD, AB и BC.

Замечание. То, что точка K лежит на стороне CD, никак не используется в решении. Очевидно, что точка K будет равноудалена от прямых AD, AB и BC, и не находясь на стороне CD.

3. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 18 и 4,5, диагональ BD равна 9. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство. (*Это довольно редкий случай, когда подобие треугольников доказывается исходя из пропорциональности сторон.*)

По условию,

$$\frac{BD}{AD} = \frac{1}{2} \text{ и } \frac{BC}{BD} = \frac{1}{2},$$

следовательно, стороны треугольника CBD пропорциональны сторонам треугольника BDA (рис. 4).

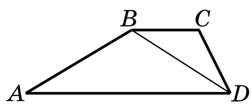


Рис. 4

Углы CBD и BDA равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC.

Отсюда следует, что треугольники CBD и BDA подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

4. В трапеции $ABCD$ биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB пересекаются в точке F; $AF = 24$, $BF = 32$. Найдите длину стороны AB.

Решение. Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под прямым углом (рис. 5). (*Это верно и для биссектрис углов при одной стороне параллелограмма. Докажите.*)

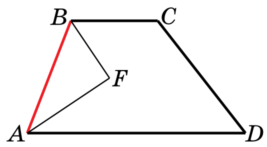


Рис. 5

Следовательно, $\angle F = 90°$ и треугольник ABF прямоугольный. А поскольку $AF = 24$ и $BF = 32$, то это египетский треугольник и $AB = 40$.

5. В трапеции $ABCD$ $\angle ABC = 45°$, $\angle BCD = 120°$, $CD = 34$. Найдите длину стороны AB.

Решение. Проведем прямую AK параллельно CD и прямую AH перпендикулярно BC (рис. 6). (*Это дополнительное построение помогает собрать известные данные вместе с искомыми в одном или в двух треугольниках.*)

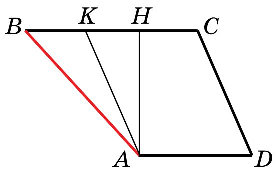


Рис. 6

В прямоугольном треугольнике AKH:

$$\angle K = 60°,$$
$$AK = CD = 34,$$

значит,

$$AH = \frac{34\sqrt{3}}{2} = 17\sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике ABH:

$$\angle B = 45°,\ AB = AH\sqrt{2} = 17\sqrt{6}.$$

6. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников APB и CPD равны.

Доказательство. Диагонали разбивают трапецию на равные по площади треугольники ABD и ACD (AD общая и высоты равны) (рис. 7):

$$S_{ABD} = S_{ACD}.$$

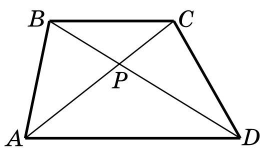


Рис. 7

Искомые площади треугольников APB и CPD найдем как разность равных площадей и площади треугольника APD, поэтому они равны:

$$S_{APB} = S_{ABD} - S_{APD} = S_{ACD} - S_{APD} = S_{CPD}.$$

7. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ взяли точку K: $CK = DK$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Доказательство. Площадь треугольника KAB равна разности площадей трапеции и треугольников BKC и AKD, основаниями которых являются основания трапеции, а высотами — половинки высоты трапеции (рис. 8).

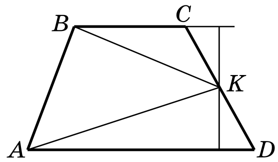


Рис. 8

Пусть высота трапеции равна h, тогда:

$$S_{KAB} = S_{ABCD} - S_{BKC} - S_{AKD} =$$
$$= \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot h - \frac{1}{2}BC\cdot\frac{h}{2} - \frac{1}{2}AD\cdot\frac{h}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot h - \frac{1}{4}(AD + BC)\cdot h = \frac{1}{4}(AD + BC)\cdot h =$$
$$= \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

8. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади трапеции.

Доказательство. Средняя линия трапеции делит пополам все отрезки, имеющие концы на основаниях трапеции, в том числе и высоту трапеции. Поэтому высоты треугольников BCF и AFD, проведенные из вершины F, равны половине высоты трапеции (рис. 9).

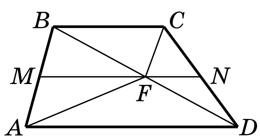


Рис. 9

Пусть высота трапеции равна h, тогда:

$$S_{BFC} + S_{AFD} = \frac{1}{2}BC\cdot\frac{h}{2} + \frac{1}{2}AD\cdot\frac{h}{2} = \frac{1}{4}AD\cdot h + \frac{1}{4}BC\cdot h =$$
$$= \frac{1}{4}(AD + BC)\cdot h = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

9. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 34 и 2, а сумма углов при основании AD равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB = 24$.

Решение. В этой задаче очень полезно продолжить боковые стороны трапеции, ведь сумма углов при основании AD равна 90°. Образовавшийся треугольник AMD будет прямоугольным.

Проведя радиус OK в точку касания и срединный перпендикуляр к отрезку AB, получим четырехугольник $OKMF$, в котором все углы прямые, то есть прямоугольник (рис. 10).

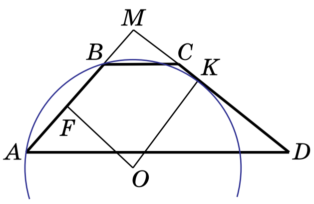


Рис. 10

Значит, искомый радиус

$$OK = FM = \frac{1}{2}AB + BM = 12 + BM.$$

Пусть отрезок BM равен x. Из подобия треугольников BMC и AMD следует:

$$\frac{BM}{AM} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{34},$$

$$\frac{x}{24+x} = \frac{1}{17},$$

$$x = 1{,}5.$$

Следовательно, $OK = 13{,}5$.

10. Углы при одном из оснований трапеции равны 53° и 37°, а отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон трапеции, равны 6 и 2. Найдите длины оснований трапеции.

Решение. (*В этой задаче тоже полезно продолжить боковые стороны трапеции, потому что сумма углов при основании AD равна 90° и образовавшийся треугольник APD будет прямоугольным.*)

Обозначим середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно K, N, L и M (рис. 11).

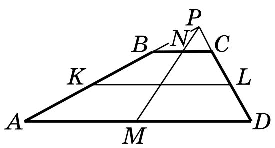


Рис. 11

Поскольку M — середина AD, то PM является медианой треугольника APD, а так как он прямоугольный, то

$$PM = \frac{1}{2}AD.$$

Покажем, что часть отрезка PM, заключенная внутри треугольника BPC, тоже является медианой. Пусть PM пересекает BC в точке N_1, тогда из подобия треугольников BPN_1 и APM следует, что

$$\frac{BN_1}{AM} = \frac{PN_1}{PM}.$$

Аналогично из подобия треугольников CPN_1 и DPM следует, что

$$\frac{CN_1}{DM} = \frac{PN_1}{PM}.$$

Значит,

$$\frac{BN_1}{AM} = \frac{CN_1}{DM} \text{ или } \frac{BN_1}{CN_1} = \frac{AM}{DM}.$$

Но $AM = DM$, а потому и $BN_1 = CN_1$.

Точка N_1 — середина BC, и N_1 совпадает с N, PM пересекает BC в точке N. Следовательно, PN является частью отрезка PM и медианой прямоугольного треугольника BPC и $PM = \frac{1}{2}BC$. Отсюда получаем первое уравнение для сторон AD и BC:

$$MN = PM - PN = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD - BC),$$

откуда

$$AD - BC = 2MN = 4.$$

Отрезок KL является средней линией трапеции, поэтому

$$KL = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Отсюда получаем второе уравнение для AD и BC:

$$AD + BC = 2KL = 12.$$

Решая их, получим:

$$AD = 8$$

и

$$BC = 4.$$

11. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 12 и 13, а основание BC равно 4. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Решение. (*В этой задаче можно применить еще одно полезное дополнительное построение: продолжить биссектрису угла при нижнем основании до пересечения с верхним основанием. Полезно оно тем, что при этом образуется равнобедренный треугольник.*)

Продолжим биссектрису угла ADC до пересечения с прямой BC в точке M (рис. 12).

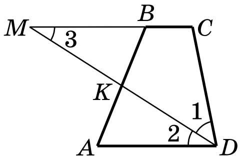


Рис. 12

Образовался треугольник DMC, в котором

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ и } \angle 3 = \angle 2,$$

значит, $\angle 1 = \angle 3$ и треугольник DMC равнобедренный. Следовательно,

$$MC = CD = 13;$$

$$MB = MC - BC = 9.$$

Кроме того, образовались равные треугольники MBK и DAK ($AK = KB$ по условию, $\angle 3 = \angle 2$ и углы MKB и AKD равны как вертикальные), значит, $MB = AD$, и известно второе основание трапеции, $AD = 9$.

Для вычисления площади не хватает высоты трапеции. И тут можно обратить внимание на боковые стороны этой трапеции — их длины 12 и 13. Возможно, это часть пифагоровой тройки (5; 12; 13); сторона AB, равная 12, будет катетом в прямоугольном треугольнике, а значит, и высотой трапеции.

Построим такой треугольник, проведя $BN \parallel CD$ (рис. 13).

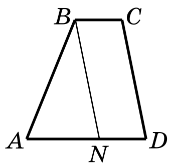


Рис. 13

$BCDN$ — параллелограмм, значит,

$$BN = CD = 13,$$

$$DN = BC = 4.$$

В треугольнике ABN:

$$BN = 13,$$

$$AB = 12,$$

$$AN = AD - DN = 9 - 4 = 5.$$

Действительно, треугольник ABN оказался прямоугольным со сторонами 13, 12 и 5, $AB = 12$ — катет этого треугольника и высота трапеции.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB = 78.$$

12. В равнобедренной трапеции биссектрисы углов A и C пересекаются в точке F, при этом $\angle AFC = 150°$. Биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке K. Найдите длину отрезка CK, если $FK = 6\sqrt{3}$.

Решение. (*В этой задаче все построения уже сделаны, продолжение биссектрисы AF за точку K только уведет от решения задачи.*)

Во-первых, сразу обнаруживаем, что $\angle CFK = 30°$, и это подсказывает дальнейшее решение — доказать, что треугольник CFK прямоугольный.

$$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle BCD,$$

$$\angle 2 = \frac{1}{2}\angle BAD,$$

но

$$\angle BCD = \angle ABC,$$

поэтому

$$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABC,$$

а тогда

$$\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAD) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°.$$

Кажется, что этот факт не помог доказать, что треугольник CFK прямоугольный (рис. 14).

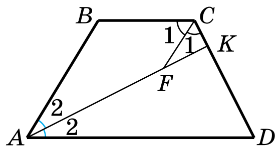


Рис. 14

Заметим, что $\angle 1$ и $\angle 2$ находятся в четырехугольнике $ABCF$, в котором

$$\angle ABC = 360° - 150° - 90° = 120°.$$

А поскольку

$$\angle BCD = \angle ABC$$

и

$$\angle 1 = \angle BCD : 2,$$

то

$$\angle 1 = 120° : 2 = 60°.$$

Значит, треугольник CFK прямоугольный с углами 30° и 60°,

$$CK = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{FK}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6.$$

13. В равнобедренной трапеции биссектрисы углов A и C пересекаются в точке F, при этом $AB \parallel CF$. Биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке K. Найдите длину отрезка CF, если $FK = 4\sqrt{3}$.

Решение. (*В этой задаче вновь проведены биссектрисы противолежащих углов равнобедренной трапеции, поэтому из решения предыдущей задачи следует, что $\angle 1 + \angle 2 = 90°$.*)

В треугольнике CFK $\angle CFK = \angle 2$, так как $CF \parallel AB$, и $\angle FCK = \angle 1$, поэтому треугольник CFK прямоугольный, но, в отличии от предыдущей задачи, величины острых углов этого треугольника неизвестны (рис. 15).

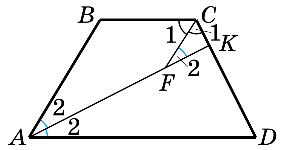


Рис. 15

Посмотрим, что получится, если продолжить биссектрису AK до пересечения с основанием BC в точке M (рис. 16).

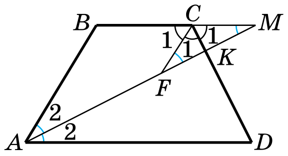


Рис. 16

$$\angle CFK = \angle 2 \text{ и } \angle CMK = \angle 2,$$

так как основания BC и AD параллельны, следовательно, $\angle\ CFK = \angle\ CMK$ и треугольник CFM равнобедренный. Значит, его высота CK является и биссектрисой, а все три угла с вершиной в точке C равны:

$$\angle KCM = \angle KCF = \angle 1.$$

Отсюда

$$\angle 1 = 180^\circ : 3 = 60^\circ;$$

$$CF = \frac{FK}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8.$$

14. Основания трапеции относятся как 1 : 2. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

Решение. Эта прямая разделила трапецию на две трапеции, площади которых можно вычислить, а затем определить их отношение.

Пусть $BC = a$, высота трапеции $MNCB$ равна h, тогда $AD = 2a$, а высота трапеции $AMND$ равна $2h$ (рис. 17).

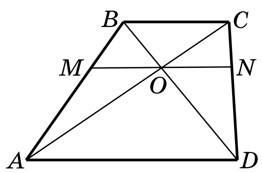


Рис. 17

Если определить величину основания MN, то можно выразить через a и h площади трапеций $MNCB$ и $AMND$ и узнать их отношение.

Из подобия треугольников AOD и COB:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{2}{1}.$$

Следовательно,

$$\frac{AO}{AC} = \frac{2}{3} \text{ и } \frac{MO}{BC} = \frac{2}{3},$$

значит,

$$MO = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}a.$$

Аналогично

$$NO = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}a,$$

значит,

$$MN = \frac{4}{3}a.$$

$$S_{MNCD} = \frac{1}{2}(MN + BC)\cdot h = \frac{7}{6}ah,$$

$$S_{AMND} = \frac{1}{2}(MN + AD)\cdot 2h = \frac{10}{3}ah,$$

$$S_{MNCD} : S_{AMND} = 7 : 20.$$

Эту задачу можно решить разными способами. Например, выразить площади трапеций $MNCB$ и $AMND$ как сумму площадей треугольников, их составляющих.

А можно сделать дополнительное построение: продолжить боковые стороны трапеции, которое часто приводит к простому решению. Образовавшиеся при этом треугольники подобны, отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия (рис. 18).

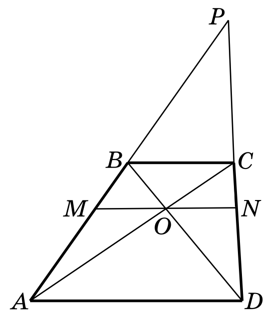


Рис. 18

Пусть

$$S_{BPC} = S,\ S_{APD} = 4S.$$

Треугольники BPC и APD подобны с коэффициентом подобия 2.

$$MN = \frac{4}{3}BC,$$

поэтому

$$S_{MNP} = \frac{16}{9}S.$$

$$S_{MNCD} = S_{MNP} - S_{BPC} = \frac{16}{9}S - S = \frac{7}{9}S,$$

$$S_{AMND} = S_{APD} - S_{MNP} = 4S - \frac{16}{9}S = \frac{20}{9}S,$$

$$S_{MNCD} : S_{AMND} = 7 : 20.$$

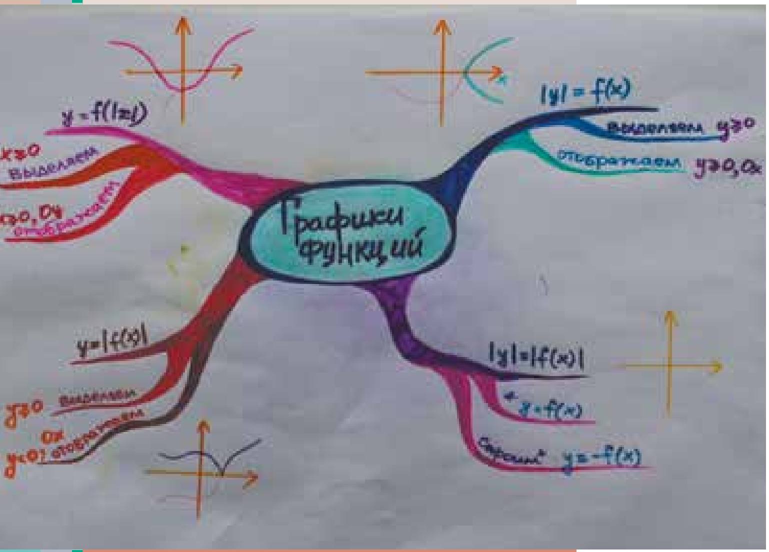
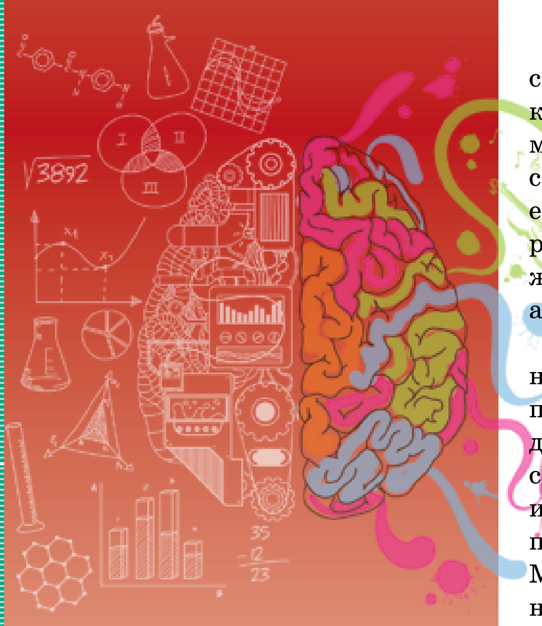


Рис. 1. Ментальная карта «Графики функций с модулем»

Рис. 2. Ментальная карта «Графики функций»

О. КОНОВАЛОВА,
г. Ижевск,
Удмуртская Республика

КАРТЫ РАЗУМА НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ



Изложение нового материала, как правило, сочетается с применением средств наглядности: демонстрация картин, схем, рисунков, применение карточек с дозированной помощью, с образцами решения задач и т.д. Сущность этих приемов состоит в том, что в процессе учебной работы учитель использует иллюстрации, то есть наглядное пояснение, или же демонстрирует то или иное учебное пособие, которое, с одной стороны, может облегчить восприятие и осмысление изучаемого материала, а с другой — выступать в качестве источника новых знаний.

Очень часто, чтобы запомнить что-то, мы записываем это куда-нибудь и храним до момента, пока эта информация нам больше не понадобится. Но иногда и этого бывает недостаточно. На уроках дети привыкли записывать информацию в линейном виде: текст с заголовками, списки, таблицы, схемы. Вещи вроде бы простые и логичные, однако всем знакомо усилие, которое приходится прилагать, вчитываясь в конспект, даже сделанный самолично. Многим учащимся трудно запомнить информацию и еще труднее восстановить ее в памяти. Поэтому возникает вопрос, а как же лучше записывать информацию для того, чтобы она легко запоминалась, а сам процесс ее восприятия не утомлял. Про использование ментальных карт я узнала четыре года назад, когда посетила урок коллеги — учителя биологии. В рамках биологии это было настолько органично и естественно, что я подумала, нельзя ли эти карты применить на уроках математики. Немного поискав в интернете, я наткнулась на этот очень эффективный метод запоми-

Рис. 3. Ментальная карта «Действия над дробями»

Рис. 4. Ментальная карта «Область допустимых значений»

нания материала — составление ментальных карт (карт разума), о котором я и хочу рассказать чуть подробнее.

Немного истории. Ментальные карты — это особая техника визуализации мышления, построенная на создании эффективных альтернативных записей. Данный метод позволяет отобразить процесс общего системного мышления. В некоторых переводах приводится другое название данной методики: «карты ума», «интеллект-карты», «карты разума», «карты памяти».

Данная методика была разработана психологом Тони Бьюзеном в конце 1950 года XX века. Он исследовал мыслительные системы, которые были предпочтительными в эпоху античности и Ренессанса. Опираясь на опыт великих мыслителей прошлого, Бьюзен заметил, что, создавая свои записи, они следовали ассоциативным связям и даже фантазии. Поэтому их записи были живыми и «говорящими», способными донести информацию не только их непосредственному создателю, но и любому иному человеку, даже через толщу веков. Отсюда же психолог почерпнул и значение рисунка для передачи и оформления собственных мыслей. Бьюзен утверждал, что, как правило, исходя из традиционных представлений о восприятии информации, читателю приходится просматривать страницу слева направо и сверху вниз, — а это неверно, что на самом деле человек «сканирует» страницу целиком и нелинейно. Психолог систематизировал использование ментальных карт, разработал правила и принципы их конструкции и приложил массу усилий для популяризации и распространения этой технологии.

Суть методики ментальных карт заключается в том, что выделяется основное понятие, от которого потом ответвляются задачи, идеи, отдельные мысли и шаги, необходимые для реализации конкретного проекта или задумки. Дальше — больше. Точно так же, как и основная, все более мелкие ветки могут делиться еще на несколько ветвей-подпунктов. Получается, что ментальная карта отображает ассоциативные связи в мозге ее создателя. Никакого сухого материала, длинных умных фраз, стенографии и иных способов сохранения и передачи информации. Поэтому дальнейшая работа с такими ментальными картами не будет вызывать дискомфорта и отторжения. Более того, с ними будет работать интересно и продуктивно.

Тони Бьюзен дает несколько советов по созданию ментальных карт.

- Ключевые слова помещаются не в прямоугольники или всевозможные пузыри, висящие на ветках, идущих от основной идеи, а на самих ветках.
- Ветки должны быть живыми и гибкими, чтобы исключать создание монотонных объектов.
- На каждой линии пишется только одно ключевое слово. Раздельное написание слов может привести к новым идеям.
- Длина линии должна быть равна длине слова.
- Слова пишутся печатными буквами. Они должны быть четки и легки в прочтении.
- Размеры и толщина букв и линий должна варьироваться в зависимости от важности. Это же позволит внести разнообразие, поможет сосредоточиться на главном.

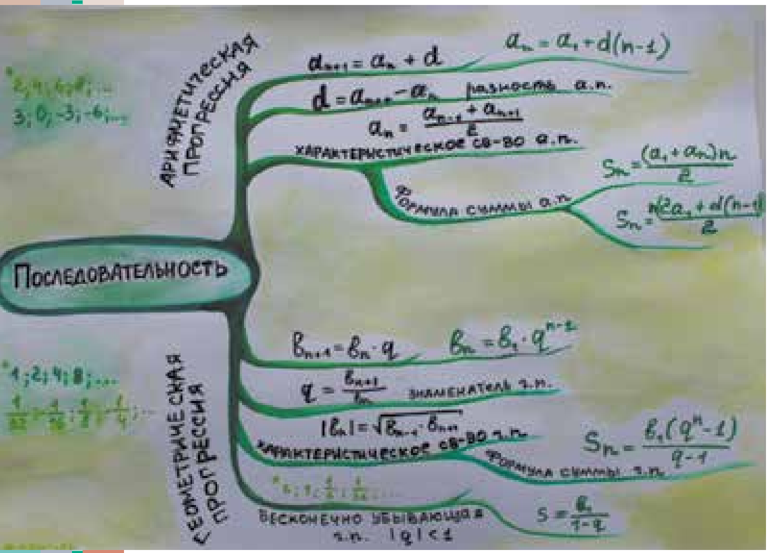


Рис. 5. Ментальная карта «Последовательности»

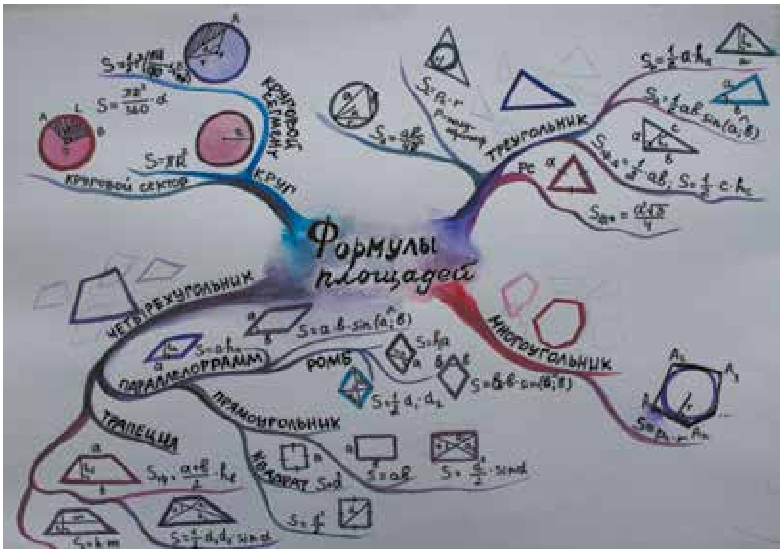


Рис. 6. Ментальная карта «Формулы площадей»

• Используются разные цвета. Каждая ветвь может иметь свой цвет.

• Должны использоваться рисунки и символы, особенно в центральной части.

• Пространство должно быть заполнено, на карте не должно быть пустых мест, однако она не должна быть перегружена. Для создания небольших карт используется формат бумаги А4, а для более крупных — А3.

• Если ветви чересчур разрослись, их можно заключить в контуры, чтобы они не смешивались с соседними ветвями.

• Лист должен быть расположен горизонтально. Тогда будет удобнее читать карту.

Карту можно считать законченной, если она выглядит цельной и крепкой. Это означает, что ее составитель разобрался в теме или проблеме. Если же этого не получилось, то стоит продолжить анализ и ассоциативный ряд. Иногда для этого необходимо уделить больше внимания какой-либо одной отдельной ветке, которая вышла не очень красиво, а значит, и является слабым звеном.

Ученики могут использовать ментальную карту для конспектирования материала, составления плана своего ответа, графического отображения изучаемых концепций.

Пока для себя я определила, что в конце каждого триместра в 5–6-х классах мы с ребятами проводим уроки-воспоминания о том, какой материал был пройден. У младших школьников эти карты получаются в виде зарисовок, отдаленно напоминающих ментальные карты. На первом итоговом уроке в 5-м классе я провожу инструктаж-напоминание, в чем суть таких карт. Но ребята уже обучены в ходе уроков биологии, поэтому процесс составления карт идет спокойно, правда, качество составления оставляет желать лучшего. Как правило, карты ребята выполняют в парах, но есть и индивидуалисты, которые составляют персонально для себя. Смысл карты, ее раскрытие ребята проводят по желанию.

Начиная с 7-го класса пытаемся составлять карты по содержательным линиям курса математики. Например, если взять линию уравнений, то в 7-м классе мы начинаем с линейных уравнений, далее работа над этой картой продолжится в 8-м классе, когда появятся квадратные уравнения. Как правило, эти карты хранятся в так называемых зачетных тетрадях учащихся, в которых записывается теоретический материал.

Наиболее оправдывает себя составление карт, на мой взгляд, в 9-м и 11-м классах. На одном из уроков, ближе к концу учебного года, мы с ребятами начинаем восстанавливать основные темы школьного курса математики, которые, на их взгляд, нужно обязательно удержать в памяти для успешной сдачи экзамена. После этого ребята начинают «творить», при этом пользоваться справочниками или интернетом нельзя. После этого создается галерея из таких карт. Задача ребят: найти ошибки в картах товарищей или дополнить их.

Я заметила, что наиболее креативными бывают карты, созданные учащимися, которые любят рисовать или занимаются в художественных школах. При этом цветовая гамма тоже имеет свое значение: некоторые карты просто светятся, а другие выполнены в мрачных тонах. Оказывается, ярко и красочно — ребенок

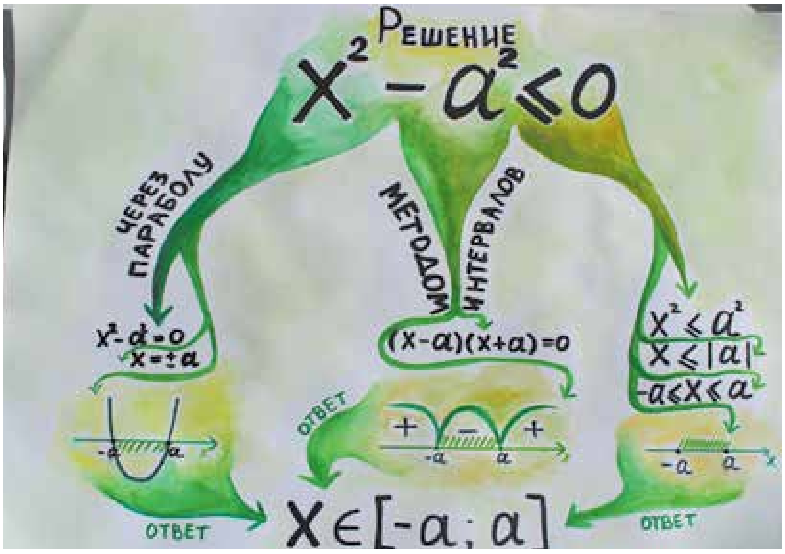


Рис. 7. Ментальная карта «Решение неравенства »

Рис. 8. Ментальная карта «Свойства функции»

уверен и успешен в этой теме; темный цвет, некая небрежность в выполнении — материал вызывает затруднения. В общем, цвет — это мне и ученику подсказка, над какой темой стоит еще поработать.

Я уверена, что благодаря составленным ментальным картам, ребята могут легко запоминать материал, который в последующем понадобится им на экзамене по математике. Надеюсь, что данный материал будет полезен учителям математики при обобщении изученного материала.

Литература

1. Развитие памяти, внимания и мышления в сети. — Режим доступа: https://mnemonica.ru/articles/mindmap/intellektualnye-karty-ot-toni-byuzena.
2. Мультиурок. — Режим доступа: https://multiurok.ru/files/karty-pamiati-gotovimsia-k-ekzamienam.html.
3. Международный образовательный портал MAAM.ru. — Режим доступа: https://www.maam.ru/detskijsad/-ispolzovanie-myslitelnyh-kart-toni-byuzena-v-rabote.html.

В оформлении статьи (рис. 1–9) использованы наиболее интересные ментальные карты, составленные учащимися выпускных классов.

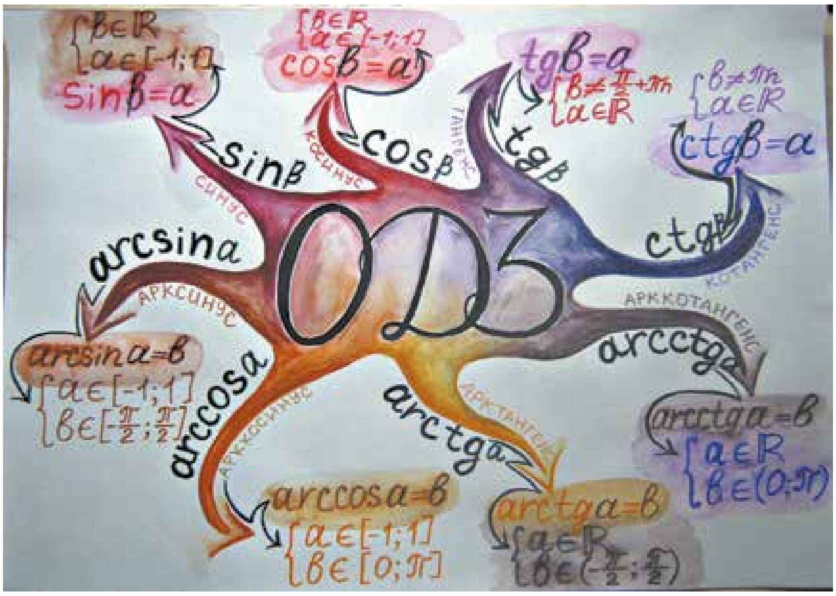


Рис. 9. Ментальная карта «Область допустимых значений. Тригонометрия»

В. ПЫРКОВ,
г. Батайск, Ростовская обл.

С методическими работами Гончарова можно ознакомиться на сайте www.mathedu.ru

К 125-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ В.Л. ГОНЧАРОВА

Василий Леонидович Гончаров (1896–1955) — отечественный математик-педагог, член-корреспондент Академии педагогических наук РСФСР (1944), доктор физико-математических наук, профессор; заведовал сектором методики математики Научно-исследовательского института методов обучения Академии педагогических наук РСФСР. Сторонник реформы отечественного школьного математического образования середины XX века.

Детство и годы учебы

Василий Леонидович Гончаров родился 11 (24) сентября 1896 года в Киеве. Его отец, Леонид Васильевич Гончаров (1872–1935), по образованию был юристом и служил следователем в Харьковском окружном суде. Кроме того, Леонид Васильевич был известным музыкальным критиком и педагогом. Мать, Инна Васильевна Гончарова (1871–1937), была переводчицей, но в основном занималась домашним хозяйством и воспитанием детей.

В.Л. Гончаров с отцом, 1900 г.

В 1914 году, по окончании 3-й Харьковской гимназии, Василий Леонидович поступил на физико-математический факультет Харьковского университета. В это время в университете преподавали такие видные математики, как С.Н. Бернштейн, А.П. Пшеборский, Ц.К. Руссьян и Д.М. Синцов. По свидетельству В.Л. Гончарова, наибольшее влияние на формирование его математических вкусов оказал будущий академик С.Н. Бернштейн, которого он считал своим непосредственным учителем и научным руководителем.

Успешно окончив в 1919 году университет, Василий Леонидович получает предложение остаться при университете для подготовки к профессорскому званию. Этот год стал годом испытаний для В.Л. Гончарова: арест отца, гибель младшего брата, вынужденная эмиграция семьи в Болгарию. В тяжелых условиях гражданской войны, имевшей на Украине особенно жестокий характер, Гончаров принимает решение продолжить свой путь в науке. Молодой математик проходит подготовку под руководством профессора С.Н. Бернштейна при научно-исследовательском институте математики Харьковского университета. В это время его научные интересы формируются вокруг вопросов интерполирования и приближения функций.

Научная и педагогическая деятельность

С 1921 года начинается активная педагогическая деятельность В.Л. Гончарова. Он получает приглашение читать курс математического анализа в Харьковском геодезическом и землеустроительном техникуме. В 1922 году на базе этого техникума был открыт институт, а Гончаров назначен заведующим кафедрой математики. Эту должность он совмещает с должностью профессора в Харьковском институте народного образования и работой на кафедре математического анализа открывшегося при Харьковском университете Украинского научно-исследовательского института математики и механики, руководителем которого назначен С.Н. Бернштейн. Под научным руководством последнего Гончаров получил важные результаты в области функций комплексного переменного и был командирован для совершенствования подготовки в Парижский университет, где пробыл с 1926 по 1928 год, получая стипендию от фонда Рокфеллеров.

В Париже Гончаров работает под руководством видных математиков — академиков Ж. Адамара, А. Лебега и П. Монтеля. В результате этой командировки появляется один из основных его научных трудов — «Теория интерполирования и приближенных функций». Это исследование стало славным продолжением работ П.Л. Чебышева и С.Н. Бернштейна, в нем Гончаров ввел особый метод интерполяции. В 1932 году эта работа была опубликована в Парижском университете и принята там как докторская диссертация. В 1934 году она издана в России, а в 1935 году Гончаров удостоен степени доктора физико-математических наук без защиты диссертации.

Более семи лет В.Л. Гончаров состоял секретарем Харьковского математического общества. В этом качестве он выступил членом организационного комитета I Всесоюзного съезда математиков, проходившего в Харькове в 1930 году, и редактором «Трудов» этого съезда.

С 1931 года Гончаров переезжает в Москву, где его избирают заведующим кафедрой высшей математики Московского авиационного института. С 1934 года он совмещает эту работу с чтением курса лекций «Теория вероятностей с применением к артиллерийской стрельбе и бомбометанию» в Академии военно-воздушных сил имени Н.Е. Жуковского, а в 1937 году становится профессором МГУ имени М.В. Ломоносова.

Преподавательская деятельность занимала существенное место в жизни Гончарова. Широкая научная эрудиция, умение воплощать абстрактные понятия в конкретные образы, яркая, выразительная речь и чуткое отношение к аудитории позволили Василию Леонидовичу стать исключительным мастером-педагогом, чьи лекции ежегодно слушали более тысячи студентов.

В 1943 году Гончарова по рекомендации А.Я. Хинчина назначают заведующим кабинетом в Институте школ Наркомпроса. В этом же году организуется Академия педагогических наук, В.Л. Гончаров входит в ее первый состав в качестве члена-корреспондента и заведующего сектором методики математики Института методов обучения АПН РСФСР. Эта работа становится для Гончарова основной деятельностью; по совместительству он некоторое время заведует кафедрой математики Московского института стали им. И.В. Сталина и преподает в Московском заочном педагогическом институте.

Работа сектора методики математики, возглавляемого В.Л. Гончаровым, объединила группу математиков и преподавателей вузов (И.В. Арнольд, Я.С. Дубнов, А.И. Маркушевич, Н.Ф. Четверухин и др.), которые выступали за сближение школьного курса математики с математикой как наукой в ее современном состоянии. В 1947 году ими был разработан проект новой программы, предусматривающий, в частности, введение в курс математики средней школы элементов математического анализа и аналитической геометрии. Проект этой программы не был принят, хотя некоторые содержащиеся в нем идеи все же проникли в программу нового курса математики средней школы. Одной из таких идей стало усиление роли функциональной линии курса алгебры, которым активно занимался Гончаров.

Еще одной важной стороной деятельности Гончарова были перевод зарубежной научно-популярной математической литературы и комментирование классиков науки. Он принимал участие в редактировании и составлении комментариев при подготовке изданий трудов П.Л. Чебышева, С.Н. Бернштейна и Б. Римана. Под его редакцией вышли первые русскоязычные издания книг Д. Пойа и Г. Сеге «Задачи и теоремы из анализа» (1938), Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика» (1947).

В 1952 году указом Президиума Верховного Совета СССР В.Л. Гончаров был награжден Орденом Ленина.

Методическое наследие Гончарова

Если в довоенный период педагогического творчества Гончарова его внимание было сосредоточено в области методики обучения высшей математике (им изданы фундаментальные курсы «Дифференциальная геометрия» (1933), «Теория вероятностей» (1937)), то с переходом в Академию педагогических наук основными стали проблемы среднего математического образования.

Уже в первой методической статье — «Идея функции в преподавании математики в средней школе» («Советская педагогика», № 3, 1945) — он ставит вопрос о необходимости реформирования математического образования на основе «привития учащимся элементов функционального мышления» и воспитания учащихся на основе осознания ключевых математических идей.

В работе «Состояние современной методики математики и перспективы ее дальнейшего развития» (1945) Гончаров выступает как проводник идей международных программ реформирования математического образования (принятой в Германии меранской программы; опыта Франции по дифференциации обучения; американского плана преподавания математики и др.), при этом отмечая, что «черпать из зарубежной сокровищницы следует не иначе, как с известным критицизмом: если реформизм — явление интернациональное, то научные традиции и социальные условия в различных странах далеко не одинаковые».

Гончаров искренне ратует за переход от «малой» методики, преследующей узко утилитарные цели и базирующейся на опыте учителя, — к формам «малой методики» он относит приемы натаскивания учащихся, используемые репетиторами, готовые инструкции и конспекты для учителя, — к «большой» методике, основанной на серьезном математическом фундаменте, теоретическом и экспериментальном обосновании.

В 1947 году в серии «Педагогическая библиотека учителя» выходит книга Гончарова «Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика в средних классах школы». В ней, на основе продуманной и экспериментально проверенной работы, автор предлагает наиболее эффективные способы формирования функционального мышления учащихся посредством специально составленной системы арифметических упражнений. При этом он, по сути, использует методы развивающего обучения, что вызывает обоснованную критику у приверженцев господствующего в то время формирующего подхода к обучению математике.

Вопросам развития функционального мышления посвящена вышедшая в этой же серии книга «Вычислительные и графические упражнения с функциональным содержанием в старших классах школы» (1948), являющаяся логическим продолжением книги 1947 года. В этом издании Гончаров предлагает существенно осовременить задачный материал курса математики средней школы, для этого им отобраны некоторые вопросы высшей математики и подвергнуты необходимой дидактической обработке. Приведем в качестве примера ряд названий предложенных им упражнений: «Биквадратные уравнения и кривая дьявола», «Симметрия кривых и кривые Ламэ», «Фигуры Лиссажу», «Розетки», «Итерация и уравнение Кеплера», «Шарнирные механизмы и кривые Уатта» и др.

В 1949 и 1950 годах выходят написанные Гончаровым учебники алгебры для 6-го и 7-го класса соответственно, а также сопровождающие их книги для учителя, представляющие собой, по образному выражению И.К. Андронова, «рецептурную методику» алгебры. Результаты экспериментальной работы за 1950–1952 годы по использованию учебников алгебры В.Л. Гончарова в реальной школьной практике были опубликованы в «Известиях АПН» (№ 56, 1954); была отмечена эффективность учебников в формировании функциональной и графической культуры учащихся. С.И. Шварцбурд, давший положительный отзыв по результатам использования этих учебников, в то же время отмечал, что «многие преимущества учебника до понимания учителя не дошли, они его пытаются дополнять и изменять» (протокол заседания сектора методики математики ИМО АПН РСФСР от 11 ноября 1952 г.).

В 1952 году выходит третий том фундаментальной «Энциклопедии элементарной математики». Два объемных раздела этого тома, посвященные функциям действительного и комплексного переменного, написаны Гончаровым.

Особый интерес представляют методические рекомендации, сформулированные Гончаровым в пособии для учителей математики «Начальная алгебра» (1955, 1960) и статье «Математика как учебный предмет» («Известия АПН», № 56, 1954).

Василий Леонидович Гончаров скоропостижно скончался 2 ноября 1955 года и был захоронен на Новодевичьем кладбище в Москве.

Дополнительные факты о Гончарове

• Свой математический и педагогический талант Гончаров сочетал с мастерством пианиста и глубоким знанием теории музыки. В течение нескольких лет он читал курс музыкальной акустики в Харьковской консерватории. Кстати, его первая математическая публикация, написанная в 1922 году, посвящена математическому аппарату темперации музыкальных инструментов и обоснованию проекта фортепиано на основе темпераций 24 и 31.

• Во время гражданской войны, в мае 1919 года, отец Гончарова был арестован и помещен в концлагерь Харьковской ЧК, известной своими жесткими методами борьбы с контрреволюцией. Чудом избежав расстрела, Леонид Васильевич вместе с семьей бежал в Крым. Из Севастополя на корабле «Инкерман» они эмигрировали в Болгарию. В.Л. Гончаров был разлучен со своей семьей. В Болгарии отец некоторое время работал журналистом, руководил хором и оркестром в Американском колледже в Самокове. В 1936 году его мать смогла получить советское гражданство и переехала в Москву к сыну.

• У Василия Леонидовича Гончарова было два младших брата: Борис (1900–1919) и Дмитрий (1906–1956). Последний работал хормейстером и дирижером Национальной оперы в Софии и был директором Софийского радиоцентра.

Высказывания Гончарова

• «Математика — язык для техника: он на нем говорит, пишет и думает».

• «Ясное понимание цели обучения математике в средней школе следует считать необходимой предпосылкой для правильной постановки преподавания».

• «Усвоению учащимися математики могло бы чрезвычайно помочь выдвижение на первый план ряда руководящих идей обобщающего характера, при условии, конечно, их фильтрации под углом зрения потребностей школы».

• «Преподавание математики, исходящее из одних лишь формально-логических предпосылок, не может обеспечить прочности усвоения и оставляет учащегося беспомощным перед задачами конкретного и прикладного содержания».

Рекомендуемая литература

1. *Андронов И.К.* Полвека развития школьного математического образования в СССР. — М.: Просвещение, 1967.

2. *Гончаров В.Л.* О проблеме равномерной темперации // Математический сборник, 1924. Т. 32, № 1.

3. *Евграфов М.А.* Интерполяционная задача Абеля–Гончарова. — М.: ГИТТЛ, 1954.

4. *Колягин Ю.М.* Русская школа и математическое образование. Наша гордость и наша боль. — М.: Просвещение, 2001.

5. *Новоселов С.И.* О книге В.Л. Гончарова «Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика» // Математика в школе, 1948, № 5.

6. Российская академия образования. Персональный состав. 1943–2013. — М.: НПБ им. К.Д. Ушинского, 2013.

7. *Марчевский М.Н.* История математических кафедр в Харьковском университете за 150 лет его существования // Записки математического отделения физико-математического факультета Харьковского государственного университета и Харьковского математического общества, 1956. Т. 24.

В. БАРАНОВ,
О. БАРАНОВА,
г. Ижевск

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ НА КЛЕТЧАТЫХ ДОСКАХ

Часто возникают задачи с вопросом «Какое наибольшее (наименьшее) количество объектов можно (нужно)...» Решать такие задачи помогает принцип Дирихле, самая популярная формулировка которого такова: «Если в n клетках сидит m кроликов, причем $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидит по крайней мере два кролика». Это следствие свойства неравенств: «Если в каждой из n клеток сидит не более одного кролика, то всего в клетках находится не более n кроликов». В некоторых задачах непосредственно из условия становится понятно, что следует считать «кроликами», а что «клетками», в других требуется изрядное воображение, чтобы это понять.

Разберем несколько способов применения принципа Дирихле, в основном в задачах на клетчатых досках. Один из способов применения принципа Дирихле — это метод разбиения на меньшие части. Метод заключается в том, что «большой» объект мы разбиваем на меньшие, не пересекающиеся части, в каждой из которых можно сделать оценку.

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 8.

Решение. Разобьем доску на восемь вертикалей. По условию задачи, в каждой вертикали может стоять не больше одной ладьи. Получается, что на доске может стоять не больше восьми ладей. Пример расстановки: ладьи на главной диагонали.

В этой задаче наглядно иллюстрируется принцип Дирихле: «кролики» — это ладьи, «клетки» — это вертикали доски.

2. Какое наибольшее количество королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 16.

Указание. Разбейте доску на 16 квадратов размером 2×2.

3. Какое наибольшее количество слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 14.

Решение. Так как слоны бьют по диагонали, то будем разбивать доску на «клетки»-диагонали. Заметим, что слон, стоящий на черной клетке, бьет только черные клетки. Представим все черные клетки доски как семь диагоналей (рис. 1).

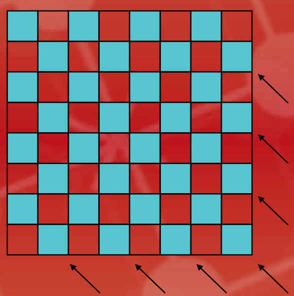


Рис. 1

По условию задачи, на каждой диагонали может стоять не более одного слона. Получается, что на черные клетки доски можно поставить не более семи слонов. Аналогично не более семи слонов можно поставить на белые клетки доски. Значит, всего можно поставить не больше 14 слонов.

Пример строится несложно.

Замечание. Можно не делить слонов на стоящих в черных и белых клетках. Всю доску можно разбить на 15 диагоналей, параллельных главной диагонали a1–h8. При этом нужно заметить, что на две диагонали, содержащие по одной клетке (a8 и h1), нельзя одновременно поставить двух слонов.

4. Какое наименьшее количество клеток на доске 8×8 необходимо отметить так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 была отмеченная клетка?

Ответ: 21.

Решение. Выделим на доске двадцать один непересекающийся прямоугольник 1×3 (рис. 2).

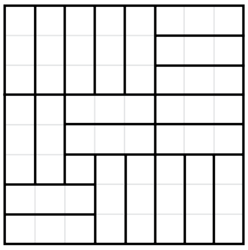


Рис. 2

Чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 оказалась отмеченная клетка, необходимо отметить не меньше 21 клетки. На рисунке 3 приведен пример на 21 клетку с редкой диагональной раскраской.

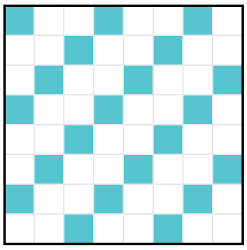


Рис. 3

5. Какое наибольшее количество клеток на доске можно закрасить так, чтобы не оказалось ни одного полностью закрашенного уголка из трех клеток, если : а) доска 8×8; б) доска 7×7?

Ответ: а) 32; б) 28.

Решение. а) Разобьем доску на 16 квадратов размером 2×2, как в задаче 2. В каждом квадрате можно закрасить не больше двух клеток. Значит, всего на доске может быть закрашено не больше 32 клеток. Пример — шахматная раскраска.

б) В отличие от пункта «а», доску не удастся разбить на удобные для оценки квадраты 2×2. Разместим эти квадраты с углов насколько это возможно, оставшуюся часть разобьем на два уголка из четырех и один уголок из пяти клеток (рис. 4).

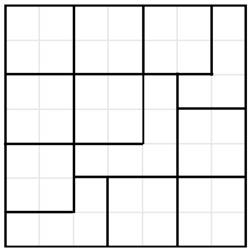


Рис. 4

В каждом квадрате 2×2 можно закрасить не больше двух клеток, в уголке из четырех клеток — не больше трех, в уголке из пяти клеток — не больше четырех. Получится, что всего можно закрасить не больше $2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 4 = 28$ клеток. Пример — раскраска «зебра», то есть закрашиваются 1-, 3-, 5- и 7-я вертикали.

Замечание. Обратим внимание, что в этой задаче мы разбили доску на различные по форме области, в каждой из которых сделали различные оценки.

6. Какое наименьшее количество клеток на доске 8×8 необходимо отметить так, чтобы в каждом уголке из четырех клеток нашлась отмеченная клетка?

Ответ: 21.

Решение. Возникает желание разбить доску 8×8 на 16 непересекающихся уголков из четырех клеток. Получается, что нам нужно отметить не меньше 16 клеток. Однако пример на 16 клеток построить не удастся.

Сделаем более точную оценку. Рассмотрим прямоугольник 2×3. В каждом таком прямоугольнике необходимо отметить не меньше двух клеток (прямой перебор показывает, что одной клетки недостаточно). Получается, что нужно отмечать 2 клетки из шести, что больше, чем одна из четырех, то есть оценка более точная.

Проведем строгие рассуждения. Разобьем доску 8×8 на 10 прямоугольников 2×3 и один уголок из четырех клеток (рис. 5).

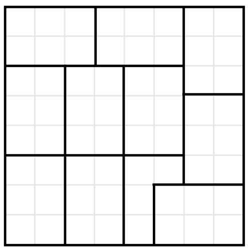


Рис. 5

Тогда необходимо отметить не меньше $2 \cdot 10 + 1 = 21$ клетки. Пример такой же, как в задаче 4. Действительно, каждый уголок из четырех клеток содержит прямоугольник 1×3, значит, в каждом уголке будет находиться хотя бы одна отмеченная клетка.

7. Какое наибольшее количество фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на любой горизонтали, вертикали и диагонали находилось четное количество фишек?

Ответ: 48.

Указание. Все клетки одного цвета на шахматной доске можно выделить в восемь диагоналей с нечетным числом клеток. Всего шестнадцать непересекающихся диагоналей, фишки не могут быть поставлены на все клетки.

8. Какое наименьшее количество уголков из трех клеток необходимо вырезать из доски 8×8 так, чтобы нельзя было больше вырезать ни одного уголка?

Ответ: 11.

Решение. Каждый уголок из трех клеток вкладывается в квадрат 2×2. Разобьем доску 8×8 на 16 квадратов размером 2×2. В каждом таком квадрате должно быть вырезано не меньше двух клеток, значит, всего необходимо вырезать не меньше 32 клеток. Следовательно, понадобится вырезать не меньше 11 уголков (рис. 6).

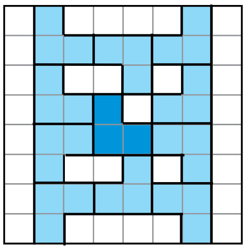


Рис. 6

9. Какое наименьшее количество клеток доски 2×7 необходимо закрасить, чтобы у каждой незакрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед?

Ответ: 4.

Решение. Рассмотрим любую клетку на доске и все смежные с ней клетки по стороне. Заметим, что среди этих клеток должна найтись хотя бы одна закрашенная. Разобьем доску 2×7 на четыре части, как показано на рисунке 7.

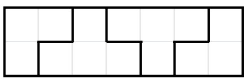


Рис. 7

В каждой части должна присутствовать хотя бы одна закрашенная клетка, иначе в этой части найдется клетка, смежная с другими в группе, которая не будет иметь закрашенную соседнюю клетку. Значит, на доске должно быть закрашено не меньше четырех клеток (рис. 8).

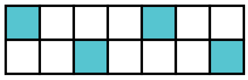


Рис. 8

10. Правильный треугольник разбит на 25 маленьких правильных треугольников. Какое наименьшее количество маленьких треугольников нужно закрасить, чтобы у каждой незакрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед? (Соседние треугольники — это треугольники, которые имеют общую сторону.)

Ответ: 7.

Решение. Разобьем треугольник на семь неодинаковых частей (рис. 9).

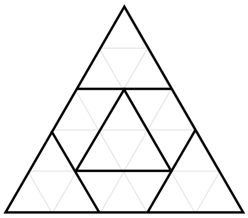


Рис. 9

В каждой из частей должен найтись закрашенный треугольник, иначе в этой части найдется незакрашенный треугольник, не имеющий закрашенного соседа. Отсюда получим оценку, что всего должно быть закрашено не меньше семи треугольников (рис. 10).

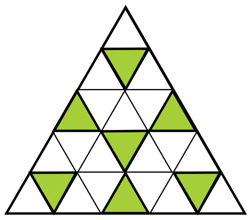
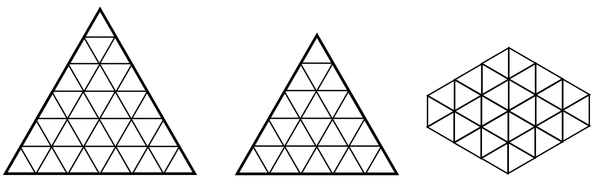


Рис. 10

11. Какое наибольшее количество треугольников можно закрасить в следующих фигурах (рис. 11) так, чтобы закрашенные треугольники не имели общих точек?

Ответ: а) 9; б) 6; в) 7.



а) б) в)

Рис. 11

Решение. Разобьем фигуры на меньшие части таким образом, чтобы любые два треугольника в одной части имели общую точку. Первую фигуру удается разбить на 9 одинаковых, а вторую на 6 неодинаковых частей, третью — на 7 неодинаковых частей (рис. 12).

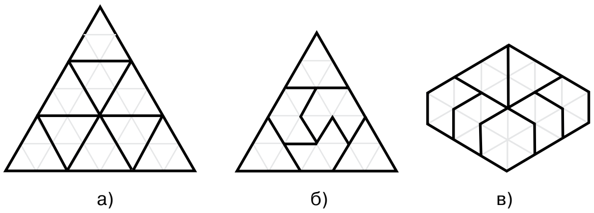


Рис. 12

В каждой из частей можно закрасить не больше одного треугольника. Отсюда получим ответ: в первой фигуре — 9, во второй — 6, в третьей — 7 (рис. 13).

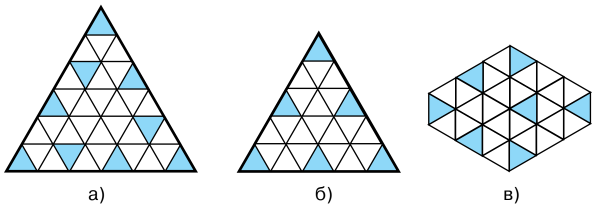


Рис. 13

К этой задаче мы еще вернемся чуть позже, при обсуждении метода подсчета узлов.

12. На совместной конференции партии лжецов и партии правдолюбов в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда, по 8 человек в каждом. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбы всегда говорят правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого.)

Ответ: 8.

Решение. Так как правдолюб всегда говорит правду, то среди его соседей (слева, справа, спереди или сзади) обязательно найдется лжец. Напоминает задачу 9. Рассмотрим доску 8×4. Будем считать, что каждый член президиума занимает определенную клетку. Будем считать лжеца закрашенной клеткой, правдолюба — незакрашенной. По условию задачи, у каждой незакрашенной клетки должна найтись соседняя по стороне закрашенная клетка. Выделим на доске восемь областей (рис. 14).

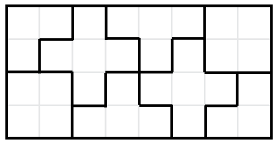


Рис. 14

В каждой из областей должна найтись закрашенная клетка, значит, закрашенных клеток не меньше 8. На рисунке 15 показан пример расположения восьми лжецов в президиуме.

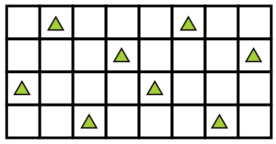


Рис. 15

Еще раз обратим внимание, что в последних задачах части разбиения были различными, что вызывает определенные трудности при решении. Далее мы перейдем к классу задач, в которых удобнее при решении подсчитывать узлы решетки, а не клетки. Узлами на клетчатой доске мы называем вершины клеток. В следующих задачах роль «кроликов» будут играть узлы.

13. Какое наибольшее количество кораблей 1×4 можно поставить на доску для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть не имели общих точек?

Ответ: 12.

Решение. Считать клетки в этой задаче не имеет смысла, так как достаточное количество клеток не всегда обеспечивает возможность поставить корабли по правилам морского боя. Расстановку кораблей по правилам морского боя помогает исследовать следующее соображение: корабли стоят на клетчатой доске по правилам морского боя, если и только если они не имеют общих узлов сетки. То есть каждому кораблю мы можем поставить в соответствие узлы сетки, причем один узел не может соответствовать различным кораблям. На доске 10×10 имеется 121 узел. Каждый корабль 1×4 имеет 10 узлов, независимо от расположения на доске (рис. 16).

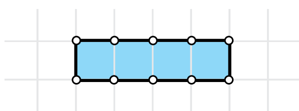


Рис. 16

Расставленные по правилам морского боя корабли не могут иметь общих узлов, поэтому n кораблям, расставленным по правилам морского боя, будет соответствовать $10n$ различных узлов. Их не больше 121. Значит, на доске 10×10 нельзя разместить больше 12 кораблей 1×4 (рис. 17).

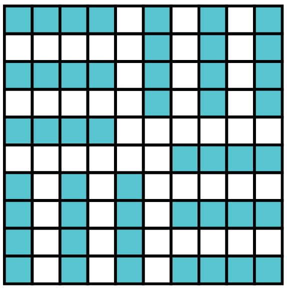


Рис. 17

Вернемся к *задаче 11.* Метод разбиения на меньшие части требовал воображения, чтобы эти части и разбиение придумать. Решим эту задачу при помощи подсчета узлов.

Заметим, что каждому закрашенному треугольнику соответствуют ровно три узла доски, при этом, по условию задачи, ни один узел не может соответствовать более чем одному закрашенному треугольнику (иначе у двух закрашенных треугольников найдется общая точка). Посчитаем узлы в фигурах. В пункте «а» — 28 узлов, в «б» — 21, в «в» — 23. Получим, что в фигурах может быть закрашено не больше, чем: а) $[28/3] = 9$; б) $[21/3] = 7$; в) $[23/3] = 7$ треугольников.

Примеры для пунктов «а» и «в» на 9 и 7 треугольников построены. В решении задачи 11, пункт «б», методом разбиения на меньшие части показано, что точная оценка — 6.

Метод подсчета узлов сразу дает точную оценку в пунктах «а» и «в» и неточную оценку в пункте «б».

Таким образом, мы видим, что метод подсчета узлов в некоторых задачах более выгоден, а в некоторых требует дополнительных соображений. Заранее сказать, какой метод более предпочтительный в конкретной задаче, невозможно.

14. Какое наибольшее количество кораблей 1×1 можно поставить на доску для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть не имели общих точек?

Ответ: 25.

Решение. Один из способов доказательства — метод разбиения на меньшие части, аналогично решению задачи 2 о расстановке на шахматной доске не бьющих друг друга королей. Полезно обратить внимание на похожесть этих задач. Решим задачу при помощи подсчета узлов. Так как каждый корабль 1×1 содержит 4 узла, то подсчет узлов даст оценку $[121/4] = 30$. Она неточная. Расставить 30 кораблей по правилам морского боя не получится.

Используем раскраску «горох» для узлов сетки (рис. 18).

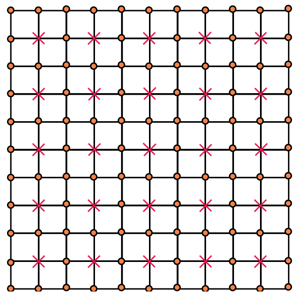


Рис. 18

Каждому кораблю 1×1 будет соответствовать ровно один окрашенный узел. При этом один узел не может соответствовать больше чем одному кораблю. Таким образом, нельзя расставить по правилам морского боя кораблей 1×1 больше, чем отмеченных узлов, то есть 25. Пример на 25 кораблей построить несложно.

В этой задаче мы использовали не только подсчет узлов, но еще применили метод раскраски узлов.

15. Какое наибольшее количество кораблей 1×3 можно поставить на доску для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть не имели общих точек?

Ответ: 12.

Решение. Каждый корабль 1×3 содержит 8 узлов. Получим, что на доску 10×10 невозможно поставить больше $[121/8] = 15$ кораблей по правилам морского боя. Однако эта оценка неточная. Раскрасим 12 узлов, как показано на рисунке 19.

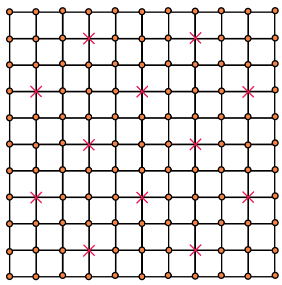


Рис. 19

Если пронумеровать линии сетки по вертикали и горизонтали от 1 до 11, то мы покрасили узлы, обе координаты которых четные, но только одна из них делится на 4.

Каждому кораблю 1×3 будет соответствовать ровно один окрашенный узел. Действительно, каждый корабль 1×3 содержит ровно одну длинную сторону, лежащую на линии с четным номером, и из четырех узлов на этой стороне ровно один окрашен.

Получим, что поставить больше 12 кораблей 1×3 по правилам морского боя невозможно, так как иначе один узел будет соответствовать двум кораблям. Кажется удивительным тот факт, что наибольшее количество кораблей 1×3 и 1×4, которые можно поставить на доску 10×10 по правилам морского боя, одно и то же. Пример на 12 кораблей построить несложно (можно взять пример из задачи 13 и уменьшить каждый корабль на одну клетку).

16. Какое наименьшее количество клеток можно закрасить на доске 8×8 так, чтобы все узлы клетчатой решетки оказались закрашенными?

Ответ: 25.

Решение. Разобьем все узлы на четыре группы так, чтобы каждый квадрат 1×1, расположенный по линиям сетки, содержал по одному узлу каждой группы (рис. 20).

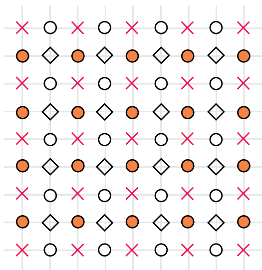


Рис. 20

Видим, что 81 узел можно разбить на четыре группы, содержащие по 25, 16, 20, 20 узлов. Так как мы делаем оценку на наименьшее значение, то для более точной оценки выберем группу с наибольшим числом узлов. У нас 25 узлов в первой группе. При закрашивании квадрата мы закрашиваем ровно один узел из этой группы. Значит, чтобы закрасить все узлы, нужно не меньше 25 квадратов (рис. 21).

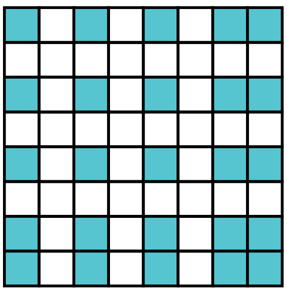


Рис. 21

17. Какое наибольшее количество диагоналей в квадратах доски 8×8 можно провести так, чтобы они не имели общих концов?

Ответ: 36.

Решение. Раскрасим узлы доски в раскраску «зебра» (рис. 22).

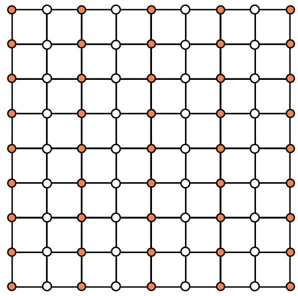


Рис. 22

Получим на доске 45 черных и 36 белых узлов. Каждая диагональ соединяет один черный и один белый узел. Так как мы делаем оценку на наибольшее значение, то для более точной оценки выберем группу с меньшим числом узлов, то есть белые. Каждой проведенной диагонали соответствует ровно один белый узел, при этом, согласно условию, никакой узел не может соответствовать более чем одной диагонали.

Тогда провести диагоналей можно не больше, чем белых узлов, то есть не больше 36 (рис. 23).

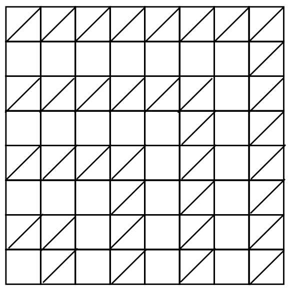


Рис. 23

Принцип Дирихле позволяет делать оценки, если установлена связь (соответствие) между объектами. Мы рассмотрели два способа применения принципа Дирихле на клетчатых досках. Помимо разбиения на меньшие части и метода подсчета узлов, можно еще считать перегородки, направления, использовать метод отмеченных множеств.

Главное — понять, что в конкретной задаче удобно считать «кроликами», а что «клетками».

Г. ФИЛИППОВСКИЙ,
г. Киев

«КУРИНАЯ ЛАПКА» В ГЕОМЕТРИИ

ИЗ МЕМУАРОВ БАРОНА МЮНХГАУЗЕНА

Рисунки
Л. Наврозашвили

Как только не называют этот красивый факт геометрии треугольника! И теоремой «трилистника», и теоремой Клайнера, и леммой «о трезубце», и леммой Мансиона. Мне же, друзья мои, более всего нравится говорить: теорема «о куриной лапке».

Ну разве не похожа конструкция на рисунке 1 на куриную лапку?

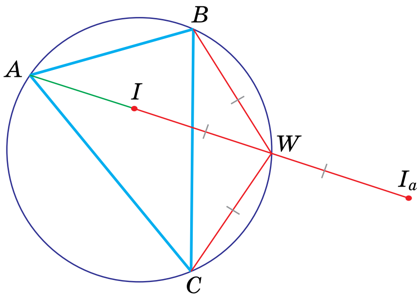


Рис. 1

Здесь

$$IW = WB = WC = WI_a$$

(I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, W — точка пересечения продолжения биссектрисы угла A с описанной около треугольника ABC окружностью, I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC). Не сомневаюсь, друзья мои, что вы сами докажете эту удивительную теорему. Но если у кого-то возникнут трудности, вот несколько намеков:

а) $BW = CW$ как хорды, стягивающие равные дуги;

б) $CW = IW$ из равенства двух углов в треугольнике IWC;

в) $\angle ICI_a = 90°$ как угол между биссектрисами смежных углов.

А теперь — мои любимые задачи на «куриную лапку», которые подтвердят красоту, важность, полезность этой теоремы!

1. Восстановите треугольник ABC по вершине A, а также точкам F, N, W (F и N — точки пересечения биссектрисы угла A со вписанной в треугольник ABC окружностью).

Решение. Разделив отрезок FN пополам, получим точку I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Построим эту окружность и из вершины A проведем касательные к ней (рис. 2).

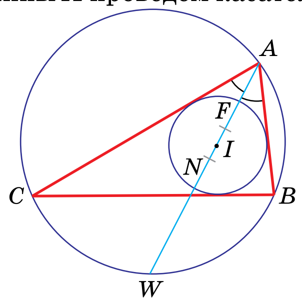


Рис. 2

На них лежат стороны AB и AC треугольника ABC. По теореме «о куриной лапке»

$$IW = BW = CW,$$

поэтому засечки из точки W раствором циркуля, равным WI, пересекут касательные в недостающих вершинах B и C треугольника ABC.

2. Восстановите треугольник ABC по центрам трех его окружностей: описанной с центром в точке O, вписанной с центром в точке I и вневписанной с центром в точке I_a, касающейся стороны BC.

Решение. Соединив I_a и I, разделим отрезок II_a пополам — получим точку W (согласно теореме «о куриной лапке»).

Построим окружность радиусом OW с центром O, описанную около треугольника ABC (рис. 3).

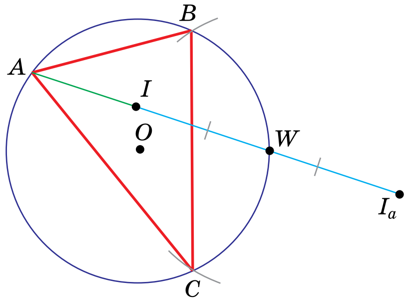


Рис. 3

Луч II_a вторично пересекает ее в вершине A нашего треугольника.

Из точки W раствором циркуля, равным WI, делаем засечки на окружности и получаем вершины B и C треугольника ABC.

3. В остроугольном треугольнике ABC отрезок «куриной лапки» $WI = n$. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника, если $\angle A = 60°$.

Решение. Способ I. Согласно теореме «о куриной лапке» $WI = WB = WC$. Поэтому точка W является центром описанной окружности треугольника BIC (рис. 4).

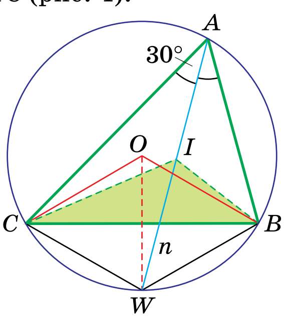


Рис. 4

При этом

$$\angle BIC = 90° + \frac{A}{2} = 90° + 30° = 120°.$$

$$\angle BOC = 2\angle A = 2 \cdot 60° = 120°,$$

он центральный для описанной окружности треугольника ABC. Так как

$$\angle BIC = \angle BOC = 120°,$$

то точка O лежит на окружности с центром W и радиусом WI. Следовательно,

$$OW = R = IW = n.$$

Способ II. По теореме синусов,

$$\frac{BW}{\sin\frac{\angle A}{2}} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABW и около треугольника ABC (это одна и та же окружность). Поскольку $BW = IW = n$ («куриная лапка»), то

$$\frac{n}{\sin 30°} = 2R.$$

Откуда $R = n$.

4. В треугольнике ABC известно, что

$$\angle A = 2\angle B,\ BC = a,\ AC = b.$$

Найдите расстояние AI от вершины A до центра вписанной в треугольник ABC окружности.

Решение. Продолжим AI до пересечения с описанной около треугольника ABC окружностью в точке W. Соединим BW и CW (рис. 5).

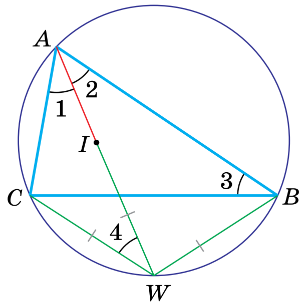


Рис. 5

Согласно условию

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3.$$

Но $\angle 3 = \angle 4$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Так как $\angle 2 = \angle 4$, то хорды AB и CW параллельны и $ABWC$ — равнобокая трапеция (описать окружность можно только около равнобокой трапеции). Тогда

$$AW = BC = a,$$
$$BW = AC = b.$$

С учетом «куриной лапки» ($BW = IW = b$) получаем:

$$AI = AW - IW = a - b.$$

5. Постройте прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90°$) по вершинам B, C и точке T касания вневписанной окружности со стороной BC.

Решение. Очевидно, гипотенуза BC будет диаметром окружности ω, описанной около треугольника ABC. Построим на BC как на диаметре окружность ω. Серединный перпендикуляр к BC пересекает правую полуокружность в точке W (рис. 6).

При этом (теорема «о куриной лапке»)

$$WB = WC = WI_a.$$

Далее из точки T проведем перпендикуляр к BC. Засечка из W раствором циркуля, равным длине «куриной лапки», пересекает этот перпендикуляр в точке I_a. Луч I_aW пересекает вторично окружность ω в недостающей вершине A.

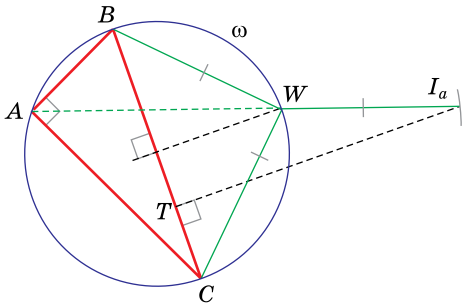


Рис. 6

6. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) описана окружность ω. Окружность s касается боковых сторон в точках F и N, а окружности ω — в точке D (рис. 7). Докажите, что K — середина отрезка FN — совпадает с инцентром I треугольника ABC.

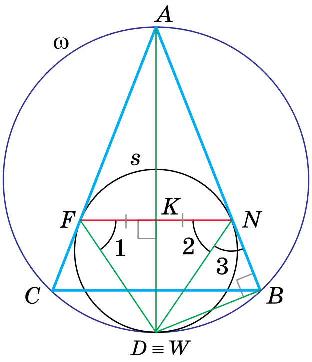


Рис. 7

Доказательство. Очевидно, что точки A, K и D лежат на одной прямой (*покажите!*). При этом D совпадает с W, а $FN \parallel BC$ (треугольник ABC равнобедренный). Отрезок AW совпадает с высотой, медианой и биссектрисой как в треугольнике AFN, так и в треугольнике ABC.

Соединив B и W, получим $\angle ABW = 90°$ (вписанный, опирается на диаметр AW).

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (треугольник FWN равнобедренный) и $\angle 1 = \angle 3$ (вписанный угол и угол между касательной и хордой), то $\angle 2 = \angle 3$. Тогда треугольник WBN равен треугольнику WKN по гипотенузе и острому углу. Значит, $WB = WK$. Но WB — отрезок «куриной лапки». Тогда и WK такой же отрезок. Но WK принадлежит биссектрисе угла A треугольника ABC. Следовательно, $K \equiv I$.

7. *Еще один отрезок «куриной лапки».* Точка K — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC. Перпендикуляр из точки K к стороне AC ($AC > AB$) пересекает эту окружность в точке P. Докажите, что отрезок AP равен «куриной лапке», то есть $AP = IW$ (рис. 8).

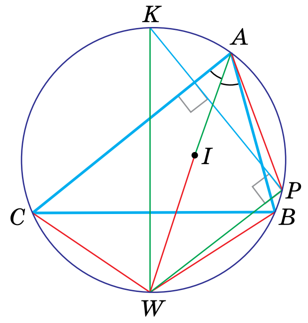


Рис. 8

Доказательство. Так как KW — диаметр окружности (K и W — середины дуг, составляющих окружность, значит, $\angle KPW = 90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр). Тогда $PW \parallel AC$ (они перпендикулярны KP). Следовательно, $APWC$ — равнобокая трапеция, значит,

$$AP = CW = IW.$$

8. *И еще один отрезок «куриной лапки»!* В треугольнике ABC ($b > a > c$) между сторонами выполняется равенство $b - a = a - c$, $2a = b + c$ (такой треугольник называется разностным). Докажите, что $AI = IW$.

Доказательство. Проведем из I и W перпендикуляры IK и WM к AB и BC соответственно (рис. 9).

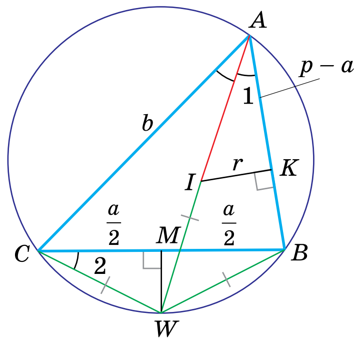


Рис. 9

Известно, что $AK = p - a$ (*покажите!*). Поскольку

$$p - a = \frac{b + c - a}{2} = \frac{2a - a}{2} = \frac{a}{2},$$

очевидно,

$$CM = BM = \frac{a}{2}$$

(треугольник BWC равнобедренный). $\angle 1 = \angle 2$ как вписанные, опираются на дугу BW. Тогда треугольник AIK равен треугольнику CWM по катету и острому углу. А значит, $AI = CW$ снова отрезок «куриной лапки».

9. AH — высота в треугольнике ABC, M — середина стороны BC. Докажите, что луч MI отсекает на AH отрезок AQ, равный радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

Доказательство. Вновь проведем отрезок IK перпендикулярно AB, при этом $IK = r$ — радиусу вписанной в треугольник ABC окружности (рис. 10).

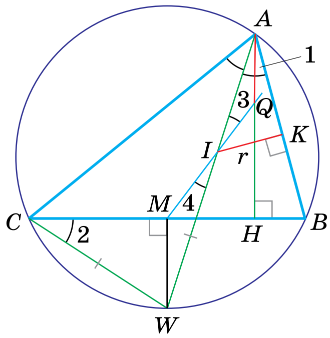


Рис. 10

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (вписанные, опираются на дугу BW), то прямоугольные треугольники AIK и CWM подобны. Значит,

$$\frac{AI}{CW} = \frac{IK}{WM}.$$

С учетом того, что $CW = IW$ («куриная лапка») и $IK = r$, получаем:

$$\frac{AI}{IW} = \frac{r}{WM}. \qquad (1)$$

Треугольники AIQ и WIM также подобны ($\angle 3 = \angle 4$ вертикальные и $\angle IAQ = \angle IWM$, так как $AH \parallel WM$). Из этого подобия следует:

$$\frac{AI}{IW} = \frac{AQ}{WM}. \qquad (2)$$

Сравнив (1) и (2), получаем:

$$AQ = r.$$

10. Докажите, что площадь треугольника OII_a вычисляется по формуле

$$S_{OII_a} = \frac{1}{2}R(b-c),$$

где R — радиус окружности ω, описанной около треугольника ABC.

Доказательство. Рассмотрим треугольник OII_a. В нем OW — медиана (согласно теореме о «куриной лапке» $IW = WI_a$). Медиана делит площадь треугольника пополам, поэтому

$$S_{OII_a} = 2S_{OIW}.$$

Проведем отрезок IF перпендикулярно радиусу OW (рис. 11).

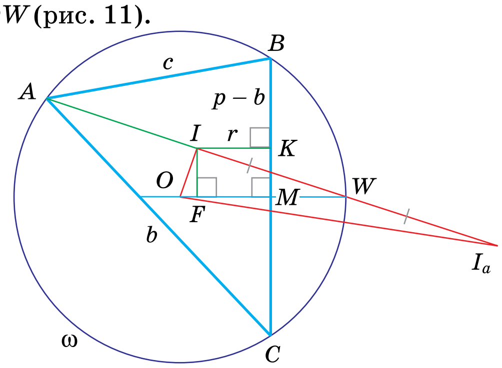


Рис. 11

Тогда

$$S_{OIW} = \frac{1}{2}OW \cdot IF.$$

Проведем также OM и $IK = r$ перпендикулярно BC. Очевидно, $IF = KM$. Так как

$$BM = \frac{a}{2},\ BK = p - b,$$

то

$$KM = \frac{a}{2} - (p-b) = \frac{b-c}{2} = IF.$$

Следовательно,

$$S_{OIW} = \frac{1}{2}OW \cdot IF = \frac{1}{2}R \cdot \frac{b-c}{2} = \frac{1}{4}R(b-c).$$

Тогда

$$S_{OII_a} = 2S_{OIW} = \frac{1}{2}R(b-c).$$

Задачи для самостоятельного решения

11. Постройте треугольник ABC по вершине A, центру O его описанной окружности и центру I вписанной в него окружности.

12. Восстановите треугольник ABC по точкам I, I_a и прямой, содержащей сторону BC этого треугольника.

13. Точка F — середина отрезка BI в треугольнике ABC. Луч WF пересекает AB в точке N. Докажите, что $NI \parallel BC$.

14. В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр. Известно, что $IW = HW$. Найдите величину угла A. Ответ: 60°.

15. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) ортоцентр H лежит на вписанной в этот треугольник окружности. Найдите косинус угла при основании. Ответ: $\frac{2}{3}$.

16. Для треугольника ABC докажите справедливость формулы $AI \cdot II_a = 4Rr$.

17. Точка M — центроид треугольника ABC (точка пересечения медиан). Известно, что $MI \perp BC$. Докажите, что в этом треугольнике

$$b + c = 3a.$$

18. Точка K внутри треугольника ABC (рис. 12) такая, что $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$. Докажите, что $AK \geq AI$. Когда выполняется знак равенства?

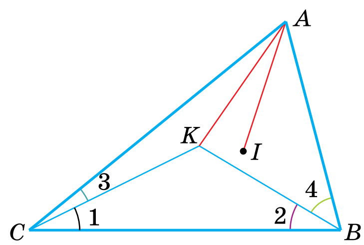


Рис. 12

19. Докажите формулу Эйлера для вневписанной окружности:

$$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a,$$

где r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон.

А. БЕГУНЦ,
Д. ГОРЯШИН,
ab@rector.msu.ru,
г. Москва

ЗАДАЧИ С НЕОДНОЗНАЧНЫМ ОТВЕТОМ

Зачастую неоднозначность ответа ожидается школьниками только в алгебраических и тригонометрических уравнениях, однако в последние годы на олимпиадах и экзаменах предлагаются разноплановые задачи, в которых условию удовлетворяют два или более значений искомой величины. Это текстовые, геометрические и логические задачи. В статье приводятся примеры таких задач и обсуждаются их полные решения.

В учебном процессе и на олимпиадах нередко встречаются задачи, ответ в которых неоднозначен: условию удовлетворяют несколько значений искомой величины. Стандартный пример — алгебраические или тригонометрические уравнения. При этом в условии автоматически подразумевается, что решить такую задачу означает найти все решения и доказать, что других нет. В заданиях вида «Решить уравнение» это традиционно подчеркивается учителем, например, при изучении квадратных уравнений в 8-м классе. К сожалению, во многих других типах задач (текстовых, геометрических и т.п.) это не столь ясно школьникам, в большинстве случаев они считают полным решение, в котором получено лишь одно значение искомой величины, удовлетворяющее условию задачи. Однако принцип «Найти все решения и доказать, что других нет» относится не только к уравнениям и неравенствам.

Задачи, при решении которых возникают два или больше значений искомой величины, стимулируют исследовательскую деятельность школьников уже в простейшей ситуации выполнения учебных или олимпиадных заданий и позволяют выработать привычку к получению исчерпывающего ответа. Решающий такую задачу неожиданно для себя сталкивается с ситуацией, когда необходимо более полно изучить описанную в задаче конструкцию, всесторонне исследовать ее. Именно поэтому важно включать подобные задания в учебный процесс, разбирая наиболее яркие примеры и делая необходимые комментарии. Строго говоря, в задачах, где ответ определен неоднозначно, а в условии явно не сказано о необходимости нахождения всех решений, логически верный ответ звучит следующим образом: «Невозможно ответить точно на поставленный вопрос, так как неизвестная величина может быть равна следующим значениям: (*перечисление*), причем каждый из этих случаев реализуется». Однако принято давать краткий ответ вида (*перечисление*), а достижимость каждого значения должна вытекать из решения задачи.

Подчеркнем, что доказательство реализуемости всех найденных значений искомой величины — неотъемлемая часть решения задачи, особенно важная при решении задач методом следствий. Использование этого метода неизбежно приводит к необходимости проверки каждого из ответов, так как в процессе вывода следствий из условия задачи получается только то, что искомая величина не может быть равна другим значениям, кроме найденных. Это не гарантирует, что последние обязательно должны быть включены в ответ: некоторые из них могут отпасть по тем или иным причинам, опять же вытекающим из условия. При решении текстовой задачи алгебраическим методом часто получается два значения искомой величины, одно из которых явно не удовлетворяет условию по смыслу задачи (например, отрицательно). В такой ситуации положительное значение не проверяется и включается в ответ. Вообще, принято исходить из того, что описываемая в условии математической задачи конструкция существует (этот факт обычно неявно постулируется при постановке задачи, а решающий не обязан это проверять), а в случае появления нескольких вариантов ответа возникает необходимость показать, что в этой конструкции неизвестная величина действительно может принимать каждое из значений, претендующих на включение в ответ.

Рассмотрим характерные примеры из различных областей школьной математики, в которых возможно получение неоднозначного ответа.

Комбинаторика, логика и задачи на целые числа

По мнению авторов, хорошим стилем является указание в условии текстовой задачи на то, что ответ может быть не единственным, иначе многие школьники просто не будут к этому готовы. Например, в условии задачи авторы смягчают модальность фразами «Сколько могло быть...», «Чему может быть равно...» и т.п. Составители подсказывают участнику олимпиады, что ответов может быть несколько.

1. (*ММО, 2016, 8.2* [*1, задача 65666*]) За круглым столом сидит 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Двое из них заявили: « Оба моих соседа — лжецы», а остальные восемь заявили: «Оба моих соседа — рыцари». Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

Решение. Заметим, что не все присутствующие являются рыцарями и не все являются лжецами: в этих случаях ни один из них не смог бы произнести первую фразу. Покажем, что рыцарей не больше двух. Предположим, что какой-то рыцарь сказал вторую фразу. Тогда оба его соседа — рыцари. Рассмотрим его соседа справа. Он рыцарь, и слева от него сидит рыцарь. Он не может солгать, сказав первую фразу, и должен сказать, что оба его соседа рыцари. Тогда рассмотрим его соседа справа. Продолжая далее, получим, что все присутствующие за столом — рыцари, чего быть не может. Значит, все присутствующие рыцари обязаны говорить первую фразу, а таких фраз всего две. Таким образом, рыцарей не больше двух.

Покажем теперь, что за столом мог быть как один, так и два рыцаря. Для этого изобразим две рассадки, а тех, кто сказал первую фразу, обведем в кружок.

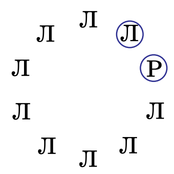


Рис. 1

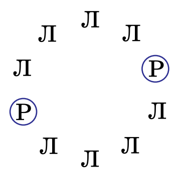


Рис. 2

На рисунке 1 рыцарь и один из соседних с ним лжецов могут произнести первую фразу, а остальные лжецы могут произнести вторую.

На рисунке 2 рыцари не сидят рядом и могут произнести первую фразу, а все лжецы могут произнести вторую.

Таким образом, мы показали, что рыцарей может быть только 1 или 2.

Ответ: 1 или 2.

Нередко в олимпиадных задачах, где ответ неоднозначен, участников олимпиады просят найти какое-либо решение поставленной задачи. Это также бывает в тех случаях, когда отыскание всех ответов затруднительно и чрезмерно усложняет задание для той позиции в комплекте заданий, на которую эта задача намечается. В этой ситуации составители комплекта сами должны отыскать все варианты, причем не только для организации проверки, но и для того, чтобы оценить, насколько трудоемко отыскание всех значений и оправданно ли упрощение условия. Приведем пример такой задачи и обсудим отыскание всех решений методом полного перебора.

2. (*ММО, 2009, 8.1* [*1, задача 111905*]) На доске написано: «В этом предложении ...% цифр делятся на 2, ...% цифр делятся на 3, а ...% цифр делятся и на 2, и на 3». Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным.

Решение. Предложим решение общей задачи, постановка которой завершается иначе: «Вставьте вместо многоточий целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным. Найдите все варианты».

По условию задачи вместо многоточий вставляются целые числа, которые могут быть только однозначными и двузначными (100% быть не может в силу взаимной простоты 2 и 3). Значит, всего в обсуждаемом предложении не меньше $3 \cdot 1 + 4 = 7$ и не больше $3 \cdot 2 + 4 = 10$ цифр. Целочисленность процентов влечет, что семь или девять цифр быть не может: доли $\frac{k}{7}$, $1 < k < 7$, и $\frac{l}{9}$, $1 < l < 9$, при переводе в проценты не дадут целые числа. Если цифр восемь, то доля двоек не меньше $\frac{1}{8}$, то есть не меньше 12,5%. Но тогда процент чисел, которые делятся на 2, — двузначное число. Точно так же дело обстоит и с тройками. Таким образом, цифр не меньше 10, поэтому всего цифр в предложении ровно десять, а значит, все пропущенные числа оканчиваются на 0, так как это доли $\frac{k}{10}$, $1 < k < 9$, переведенные в проценты. Следовательно, в предложении содержится 3 нуля. Каждый из этих трех нулей делится и на 2, и на 3, поэтому все пропущенные числа не меньше 30. Учитывая, что в предложении уже имеются две двойки и две тройки, получим, что первые два числа лежат между 50 и 80, а третье — между 30 и 60.

Организуем перебор возможных вариантов первой, четвертой и седьмой цифр предложения. Если первая цифра равна 5 или 6, то оставшиеся две должны быть нечетными. Получим следующие варианты (седьмая цифра определяется последней):

50% на 2, 50% на 3, 30% на 2 и на 3 — неверно;
50% на 2, 70% на 3 — неверно;
60% на 2, 50% на 3, 40% на 2 и на 3 — неверно;
60% на 2, 70% на 3, 40% на 2 и на 3 — неверно.

Если первая цифра равна 7 или 8, то оставшиеся две должны быть четными. Получим следующие варианты:

70% на 2, 60% на 3, 40% на 2 и на 3 — верно:
70% на 2, 80% на 3 — неверно;
80% на 2, 60% на 3, 40% на 2 и на 3 — верно;
80% на 2, 80% на 3 — неверно.

Таким образом, задача имеет два решения: «В этом предложении 70% цифр делятся на 2, 60% цифр делятся на 3, а 40% цифр делятся и на 2, и на 3» и «В этом предложении 80% цифр делятся на 2, 60% цифр делятся на 3, а 40% цифр делятся и на 2, и на 3».

Как видно, в рассмотренном решении доказательство отсутствия других вариантов, помимо найденных, весьма трудоемко, поэтому постановка задачи в форме «Вставьте какие-нибудь целые числа» существенно ее упрощает, тем более что в таком случае не требуется объяснять, как получен искомый пример.

Следующая задача является примером того, как авторы задачи не стали смягчать модальность, подсказывая участникам, что ответов может быть несколько. В результате некоторые школьники оказались не готовы к появлению двух ответов к текстовой задаче и на апелляции утверждали: «Нас учили, что в текстовой задаче ответ только один». Таким образом, ознакомление школьников с такими постановками задач расширяет их кругозор и повышает готовность к участию в олимпиадах.

3. (*ММО, 2015, 11.1.2* [*1, задача 65202*]) В прошлом году Миша купил смартфон, который стоил целое четырехзначное число рублей. Зайдя в магазин в этом году, он заметил, что цена смартфона выросла на 20% и при этом состоит из тех же цифр, но в обратном порядке. Какую сумму Миша потратил на смартфон?

Решение. Пусть Миша потратил на смартфон $\overline{abcd}$ рублей (a, b, c, d — цифры, причем $a \neq 0$ и $d \neq 0$). Тогда получим уравнение $1{,}2\overline{abcd} = \overline{dcba}$, или $6\overline{abcd} = 5\overline{dcba}$. Правая часть делится на 5, поэтому $d = 5$. Далее, цифра a четная, так как $6\overline{abcd} = 5\overline{dcba}$ четно и меньше цифры $d = 5$. Поскольку при $a = 2$ получаем

$$1{,}2 \cdot \overline{2bc5} < 1{,}2 \cdot 3000 = 3600 < \overline{5cb2},$$

то делаем вывод, что $a = 4$. Остается найти цифры b и c, удовлетворяющие уравнению

$$110b - 88c = 198,\ 5b - 4c = 9 = 5 + 4.$$

Значит,

$$5(b - 1) = 4(c + 1),$$

откуда

$$b = 5,\ c = 4$$

или

$$b = 9,\ c = 9.$$

В обоих случаях получаем сумму, удовлетворяющую условию задачи: 4545 рублей или 4995 рублей.

Ответ: 4545 рублей или 4995 рублей.

Геометрия

Неоднозначность в геометрии обычно возникает по двум причинам:

– в ходе решения задачи появляется уравнение с неизвестной величиной, имеющее больше одного решения;

– условию задачи удовлетворяют несколько геометрических конфигураций, связанных с порядком следования точек на прямой, взаимным расположением фигур и т.п.

Приведем соответствующие простейшие примеры.

Пример 1. Найдите угол между сторонами треугольника, длины которых равны 1 и 4, если площадь треугольника равна 1.

При использовании формулы для площади треугольника получим: $\sin\angle A = \frac{1}{2}$, $\angle A = 30°$ или $\angle A = 150°$, причем оба значения удовлетворяют условию задачи.

Пример 2. Найдите расстояние между центрами касающихся окружностей, радиусы которых равны 1 и 3.

В случае внешнего касания ответ 4, а в случае внутреннего — 2.

Обсудим более содержательные задачи. При проверке геометрических задач с двумя и более ответами от участников олимпиад обычно не требуется строго и подробно доказывать существование геометрических конструкций, при которых реализуются найденные значения искомой величины, хотя, формально говоря, такое доказательство для полного и исчерпывающего решения необходимо. В большинстве случаев участникам бывает достаточно ограничиться указанием на то, какое расположение фигур приводит к тому или иному ответу. Но даже отсутствие такого указания, как правило, не приводит к снижению балла.

4. (*Олимпиада «Ломоносов», 2018, 10–11.3* [2]) В треугольнике ABC, площадь которого равна 20, проведена медиана CD. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $AC = \sqrt{41}$, а центр окружности, вписанной в треугольник ACD, лежит на окружности, описанной около треугольника BCD.

Решение. Пусть Q — центр окружности, вписанной в треугольник ACD (рис. 3).

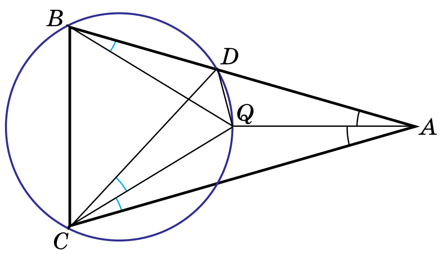


Рис. 3

Тогда отрезки AQ и CQ — биссектрисы углов BAC и ACD соответственно. По свойству вписанных углов $\angle DBQ = \angle DCQ$. Значит, треугольники ABQ и ACQ равны по стороне и двум углам. Следовательно, $AB = AC$, то есть треугольник ABC равнобедренный.

Пусть $BC = 2x$, тогда

$$S_{ABC} = x\sqrt{41 - x^2},$$

поэтому, с учетом условия, получим уравнение

$$x\sqrt{41 - x^2} = 20,$$

имеющее корни $x = 4$ или $x = 5$. Причем оба значения реализуются: первое соответствует случаю острого угла BQC, а второе — случаю тупого. Радиус описанной около треугольника ABC окружности равен

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} =$$

$$= \frac{41 \cdot 2x}{4 \cdot 20} = \frac{41x}{40}.$$

Подставляя найденные значения x, получим два возможных ответа: $\frac{41}{10}$ и $\frac{41}{8}$.

Ответ: $\frac{41}{10}$ или $\frac{41}{8}$.

В рассмотренной задаче существуют конфигурации, соответствующие обоим найденным значениям переменной. Так бывает не всегда: один из корней может приводить к нереализуемой ситуации.

В 2010–2013 гг. в планиметрической задаче с развернутым ответом ЕГЭ по математике (задача С4) получалось два (а иногда и три!) ответа. Об этом экзаменуемым было известно заранее (в демонстрационном варианте присутствовала как раз такая задача), хотя формально это не объявлялось. По критериям за решение задачи для обеих конфигураций давали максимум — 3 балла, для одной — 2 балла (и в обоих случаях на балл меньше, если неверный ответ получен из-за вычислительной ошибки). Доказывать, что конфигураций только две и что они обе реализуются, участники экзамена обязаны не были. (С 2014 г. от этой практики отказались, разбив задачу на два пункта: один — на доказательство, другой — на вычисление однозначно определенной величины.)

На примере задачи, схожей с предлагавшейся на ЕГЭ 2012 года, покажем, как варьирование параметров может привести к исчезновению второй конфигурации, тем самым подчеркивая нетривиальность вопроса о реализуемости ответов.

5. (*Аналог ЕГЭ-2012, С4*) Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = a$, $AF = b$, $\angle BAC = 45°$.

Решение. Возможны два случая:

– точка F лежит между точками A и C (рис. 4);

– точка A лежит между точками F и C (рис. 5).

1-й случай.

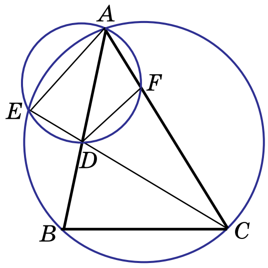


Рис. 4

Имеем

$\angle DFC = 180° - \angle AFD = \angle AED = \angle ABC$,

треугольники CDF и CDB равны. Значит,

$$BC = FC = AC - AF = a - b.$$

Тогда искомый радиус равен

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}.$$

2-й случай.

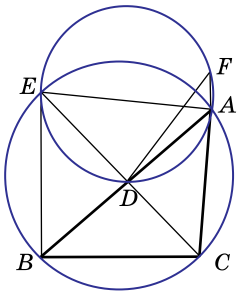


Рис. 5

Поскольку

$$\angle AFD = \angle AED = \angle ABC,$$

треугольники CDF и CDB равны. Значит,

$$BC = FC = AC + AF = a + b.$$

Тогда искомый радиус равен

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$, $\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$.

Возникает вопрос: при каких значениях a и b ($a > b$) описанные конфигурации действительно существуют? Например, если $a = 2$, $b = 1$, то хорда $AC = 2$ больше диаметра окружности, равного $\sqrt{2}$, что невозможно. А если $a = 11$, $b = 1$, то хорда $AC = 11$ — меньше диаметра окружности, равного $10\sqrt{2}$, и описанного противоречия не возникает; но где гарантия, что нет других противоречий? Оставляем этот вопрос читателю для самостоятельных размышлений. Можно предложить соответствующую тему школьникам для исследования, добавив также возможность изменения угла BAC.

6. (*Олимпиада «Ломоносов», 2017, 10–11.6* [2]) В прямой круговой конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар. Найдите объем этого шара, если он в три раза меньше объема конуса.

Решение. Пусть r — радиус вписанного шара, $R = 2$ — радиус основания, h — высота конуса, 2φ — угол между образующей конуса и плоскостью его основания, $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$, $t = \operatorname{tg}\varphi$, $0 < t < 1$. Тогда

$$r = Rt,\ h = R\operatorname{tg}2\varphi = R\frac{2t}{1-t^2}. \qquad (*)$$

По условию, $3 \cdot V_{ш} = V_{кон}$, значит,

$$3\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

После подстановки из (*) имеем:

$$12t^3 = \frac{2t}{1-t^2} \Leftrightarrow t(6t^4 - 6t^2 + 1) = 0.$$

Это уравнение имеет два положительных решения $t_{1,2} = \frac{\sqrt{3\pm\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$, причем оба удовлетворяют условию $0 < t < 1$, поэтому возможны два случая, в каждом из которых угол между образующей конуса и плоскостью основания равен $2\operatorname{arctg} t_{1,2}$ соответственно. В первом случае объем шара равен

$$V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3 t^3 = \frac{16\pi}{9}\sqrt{9+5\sqrt{3}},$$

а во втором

$$V_{ш} = \frac{16\pi}{9}\sqrt{9-5\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{16\pi}{9}\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ или $\frac{16\pi}{9}\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

Неоднозначность конфигурации может сразу вытекать из условия в силу связи искомой величины с одним из элементов фигуры, но неизвестно, с каким именно.

7. (*Олимпиада «Покори Воробьевы горы!», 2020, 10–11.3* [3]) Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

Решение. Пусть ABC — данный в условии треугольник, причем $AB > AC > BC$. Тогда $\angle C > \angle B > \angle A$. Обозначив $\angle A = \alpha$, из условия задачи получим: $\angle B = 2\alpha$ и либо $\angle C = 3\alpha$, либо $\angle C = 6\alpha$. Таким образом, возможны два случая.

1-й случай. Пусть $\angle C = 3\alpha$. Тогда

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ,\ \alpha = 30^\circ.$$

Значит, углы треугольника равны $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ (рис. 6).

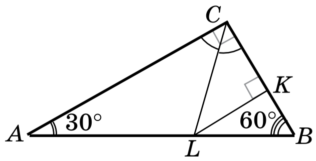


Рис. 6

По условию, $AB = AC + 10$. Кроме того,

$$AC = AB\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}AB.$$

Следовательно,

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2}AB + 10,$$

откуда находим AB:

$$AB = \frac{10}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20}{2-\sqrt{3}} = 20\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Пусть CL — искомая биссектриса, LK — перпендикуляр, проведенный из точки L к стороне BC. По свойству биссектрисы

$$AL : LB = AC : CB = \sqrt{3},$$

поэтому

$$AL = \sqrt{3}LB.$$

Тогда:

$$AB = AL + LB = LB\left(1+\sqrt{3}\right),$$

$$LB = \frac{AB}{1+\sqrt{3}} = 10\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right) = 10\left(1+\sqrt{3}\right),$$

$$LK = LB\cos 30^\circ = 10\left(1+\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\left(3+\sqrt{3}\right),$$

$$CL = \sqrt{2}LK = 5\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right) = 15\sqrt{2}+5\sqrt{6}.$$

2-й случай. Пусть $\angle C = 6\alpha$. Тогда

$$\alpha + 2\alpha + 6\alpha = 180^\circ,\ \alpha = 20^\circ.$$

Значит, углы треугольника равны $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 120^\circ$ (рис. 7).

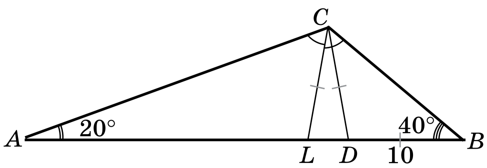


Рис. 7

По условию, $AB = AC + 10$. Отметим на отрезке AB такую точку D, что $AD = AC$. Тогда $BD = 10$, $\angle DCA = \angle CDA = 80^\circ$. Если CL — искомая биссектриса, то

$$\angle LCA = 60^\circ,\ \angle CLB = 80^\circ,$$
$$\angle DCL = 20^\circ,\ \angle BCD = 40^\circ.$$

Поэтому треугольники DCL и BDC равнобедренные, $CL = DC = BD = 10$.

Ответ: 10 или $15\sqrt{2}+5\sqrt{6}$.

В заключение обсуждения геометрии отметим, что иногда встречаются и некорректные задачи, условия которых противоречивы, то есть описанные в них конструкции попросту не существуют. Так, на Творческом конкурсе учителей математики в 2017 году предлагалось найти ошибку в решении такой «задачи» (см. [4]).

Алгебра

Здесь чаще всего встречаются задания с неоднозначным ответом: уравнения, неравенства, системы, задачи с параметром. Обычно аккуратно сформулированное условие подсказывает, что требуется найти все значения неизвестной величины (например, «Найдите все значения a, при которых...»). Однако и тут школьников могут ожидать сюрпризы.

8. (*Задача 61057* [*1*]) Два корабля двигаются с постоянными скоростями. Расстояния между ними, измеренные в 12, 14 и 15 часов, равнялись 5, 7 и 2 километра соответственно. Каким было расстояние между кораблями в 13 часов?

Решение. Поскольку движение равномерное и прямолинейное, квадрат расстояния между кораблями есть квадратичная функция f от времени, удовлетворяющая условиям $f(0) = 25$, $f(2) = 49$, $f(3) = 4$. По этим значениям функция восстанавливается однозначно: можно решить систему из трех уравнений с тремя неизвестными (коэффициентами трехчлена) или воспользоваться интерполяционным многочленом Лагранжа. Мы воспользуемся вторым способом:

$$f(t) = 25\frac{(t-2)(t-3)}{2\cdot 3} - 49\frac{t(t-3)}{2\cdot 1} + 4\frac{t(t-2)}{3\cdot 1} =$$
$$= -19t^2 + 50t + 25.$$

Отсюда $f(1) = 56$.

Казалось бы, ответ найден, но что-то смущает. В самом деле, функция, принимающая отрицательные значения, не может выражать квадрат расстояния! И вообще условие некорректно: суда, идущие с постоянными скоростями, могут сначала сближаться, а потом удаляться, но никак не наоборот, как происходит в условии. Что же делать в таких ситуациях школьнику? Мы полагаем, что, поскольку задачи с некорректными условиями обычно не изучаются на уроках, можно считать правыми и тех школьников, которые нашли ответ 56, а также и тех, кто доказал невозможность ситуации, описанной в задаче. Разумеется, подобные задания могут быть интересны для обсуждения, скажем, в рамках кружка, но для математических соревнований они не вполне годятся.

В заключение обсудим две задачи об арифметических и геометрических прогрессиях. Вообще, вопрос о единственности прогрессии, удовлетворяющей заданным условиям, представляет отдельный интерес. Например, всякая арифметическая прогрессия полностью определяется любым своим членом a_k, разностью d и количеством членов. Бывает так, что первый член прогрессии однозначно восстановить нельзя, но тем не менее искомая величина находится однозначно. Например, дана сумма первых трех членов прогрессии и требуется найти второй ее член. Тогда эта сумма равна утроенному второму члену, поэтому он определяется единственным образом, а первый член или разность прогрессии могут быть любыми.

9. (*Олимпиада «Покори Воробьевы горы!», 2020, 10–11.1* [3]) Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое ее первых четырех членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырех членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

Решение. Обозначив члены прогрессии через b_n, а знаменатель через q, получим:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=15,\quad \frac{a_3+a_4+a_5+a_6}{4}=60.$$

Поскольку

$$a_3+a_4+a_5+a_6=(a_1+a_2+a_3+a_4)q^2,$$

то $60 = 15\cdot q^2$, откуда $q = \pm 2$. Следовательно,

$$\frac{a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3}{4}=15,\ a_1(1+q+q^2+q^3)=60.$$

Если $q = 2$, то $a_1 = 4$, а если $q = -2$, то $a_1 = -12$. В первом случае $a_6 = 4\cdot 2^5 = 128$, а во втором — $a_6 = -12\cdot(-2)^5 = 384$.

Ответ: 128 или 384.

10. (*ММО, 2017, 11.2.1* [*1, задача 66094*]) Даны непостоянные прогрессии (a_n) и (b_n), одна из которых арифметическая, а другая — геометрическая. Известно, что $a_1 = b_1$, $\frac{a_2}{b_2}=2$ и $\frac{a_4}{b_4}=8$. Чему может быть равно отношение $\frac{a_3}{b_3}$?

Решение. Пусть $a_1 = b_1 = a \neq 0$, разность арифметической прогрессии равна d, а знаменатель геометрической равен q. Поскольку прогрессии непостоянны, $d \neq 0$ и $q \neq 1$. Возможны два случая.

1-й случай. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия, а (b_n) — геометрическая. Тогда, по условию, получим:

$$2aq = a + d;\ 8aq^3 = a + 3d,$$

поэтому

$$d = a(2q - 1);\ 3d = a(8q^3 - 1),$$

после подстановки имеем:

$$3a(2q - 1) = a(2q - 1)(4q^2 + 2q + 1),$$

или

$$2q^2 + q - 1 = 0,$$

откуда

$$q=\frac{1}{2}\ \text{или}\ q = -1.$$

Если $q=\frac{1}{2}$, то

$$d = a(2q - 1) = 0,$$

что по условию невозможно.

Если $q = -1$, то

$$d = -3a\ \text{и}\ \frac{a_3}{b_3}=\frac{a+2d}{aq^2}=-5.$$

2-й случай. Пусть теперь (a_n) — геометрическая прогрессия, а (b_n) — арифметическая. Тогда, по условию, получим:

$$aq = 2(a + d);\ aq^3 = 8(a + 3d),$$

поэтому

$$2d = a(q - 2);\ 24d = a(q^3 - 8),$$

после подстановки имеем:

$$12a(q - 2) = a(q - 2)(q^2 + 2q + 4),$$

или

$$q^2 + 2q - 8 = 0,$$

откуда $q = 2$ или $q = -4$. В первом случае снова $d = 0$, что противоречит условию, а во втором $q = -4$, $d = -3a$ и

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{aq^2}{a+2d}=-\frac{16}{5}.$$

Ответ: –5 или –3,2.

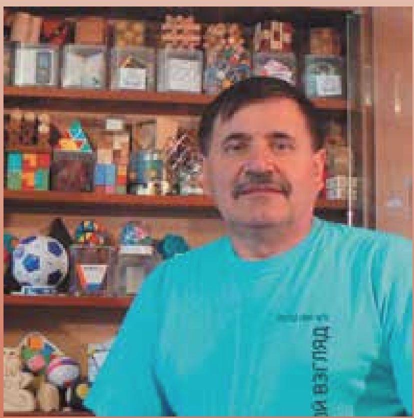
Разумеется, затронуть все постановки и темы задач с неоднозначным ответом в рамках одной статьи не представляется возможным, да это и не целесообразно. Подчеркнем еще раз важность ознакомления школьников с подобными задачами, возникающими в самых разнообразных разделах школьной программы, и необходимость их психологической готовности к встрече с описанными ситуациями.

Литература и интернет-источники

1. Сайт «Задачи». — Режим доступа: http://www.problems.ru. **2.** *Бегунц А.В., Бородин П.А., Горяшин Д.В., Зеленский А.С., Панферов В.С., Сергеев И.Н., Шейпак И.А.* Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005–2019). — М.: МЦНМО, 2020. **3.** Официальный сайт олимпиады «Покори Воробьевы горы». — Режим доступа: http://pvg.mk.ru. **4.** XIV Творческий конкурс учителей математики. Москва, 24 сентября 2017 г. Условия. — Режим доступа: http://www.mccme.ru/oluch/zadachi2017.pdf; Решения. — Режим доступа: http://www.mccme.ru/oluch/Text_17.pdf.

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

Рисунки и фото предоставлены автором



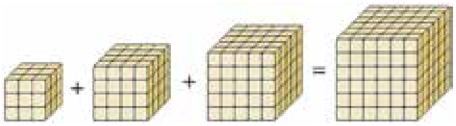
Ведущий рубрики — Николай Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

ГОЛОВОЛОМКА «ТРИ КУБА В ОДНОМ»

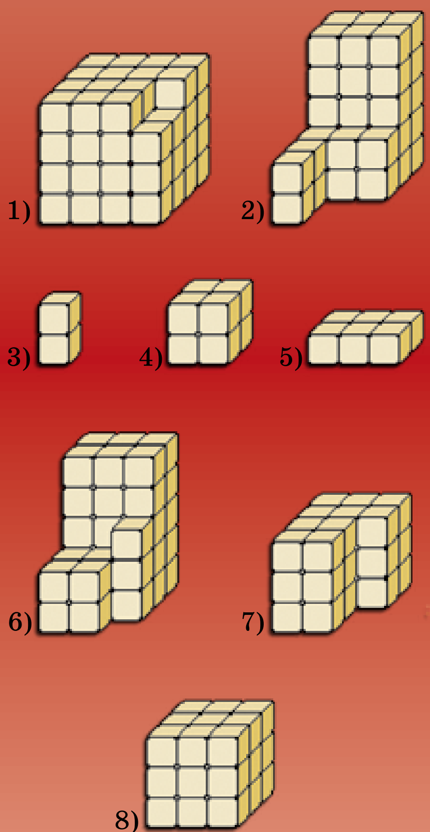
Пришло время пополнить нашу «Кладовую головоломок» 100-м экземпляром. Какую же головоломку поставить на это почетное место? Однозначно, это должна быть классическая головоломка, желательно, малоизвестная и, конечно, с математическим сюжетом. Поиск такой головоломки оказался интересной задачей, и выбор пал на головоломку «Три в одном», автором которой является Р. Уилер. За основу этой головоломки взято известное числовое равенство

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3,$$

которому соответствует геометрическое равенство



Но если суммарный объем трех меньших кубов равен объему большого куба, то это равенство можно доказать геометрически — разрезанием. Р. Уилер так искусно разрезал кубы $4 \times 4 \times 4$ и $5 \times 5 \times 5$ на несколько меньших, что из получившихся частей и куба $3 \times 3 \times 3$ оказалось возможным сложить куб $6 \times 6 \times 6$, то есть он нашел геометрическое доказательство числового равенства. Вот восемь элементов, которые получил Р. Уилер (см. слева).



Куб $4 \times 4 \times 4$ разрезан на две очевидные части: 1 и 3.

Разрезание куба $5 \times 5 \times 5$ на пять частей: 2, 4, 5, 6 и 7, не такое очевидное.

Восьмой элемент — это куб $3 \times 3 \times 3$.

Головоломку легко изготовить. Проще всего — из готовых кубиков, для этого 216 равных кубиков нужно склеить согласно рисункам 1–8.

Если нет кубиков в таком количестве, то можно сделать заготовки-параллелепипеды из деревянных реек с квадратным сечением. Понадобятся заготовки всего четырех видов: a — $1 \times 1 \times 2$, потребуется 14 штук; b — $1 \times 1 \times 3$, 16 штук; c — $1 \times 1 \times 4$, 20 штук; d — $1 \times 1 \times 5$, 12 штук.

Укажем отдельно для каждого игрового элемента набор заготовок и их количество. Эти наборы компактно записываются алгебраически:

1) $2b + 14c$; 2) $2a + 2b + 6d$; 3) $1a$; 4) $4a$;
5) $2b$; 6) $4a + 1b + 6d$; 7) $3a + 6c$; 8) $9b$.

Например, для склейки элемента с номером 6 понадобятся четыре параллелепипеда $1 \times 1 \times 2$, один параллелепипед $1 \times 1 \times 3$ и шесть параллелепипедов $1 \times 1 \times 5$.

При разрезании Р. Уилера куб $6 \times 6 \times 6$ складывается из восьми частей. Но возникает естественный вопрос: можно ли придумать другое разрезание малых кубов, чтобы большой куб в конечном итоге складывался из меньшего числа частей? Ведь в задачах на разрезание ценятся именно решения с меньшим числом частей! Можно ли улучшить решение Р. Уилера, уменьшив число частей до семи?

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

ЗНАК КАЧЕСТВА

Государственный знак качества СССР представлял собой пятиугольник, имевший слегка выпуклые стороны, как у треугольника Рело.

Каждой из пяти сторон приписывали одну из составляющих качества: надежность, доступность, безопасность, эстетичность и новаторство. Внутрь пятиугольника были вписаны две «галочки». По одной из версий, верхняя галочка символизировала рычажные весы, нижняя — циркуль, а вместе они представляли тезис: «От соизмерения — к установлению соответствия».

Правила изображения знака качества регламентировались государственным стандартом.

Знак качества был введен в 1967 году. Маркировали знаком качества любую продукцию невоенного назначения. Знак перестал использоваться после распада СССР.

ПОСТРОЕНИЕ

ISSN 2658-4042