МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ № 5 (824)

ТЕМА НОМЕРА

НА ПУТИ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

ТЕХНОЛОГИИ

ЗНАКИ И ЭМБЛЕМЫ

ПОСЛЕ УРОКА

ОЛИМПИАДЫ, КОНКУРСЫ, ТУРНИРЫ

МАТЕМАТИКА

Методический журнал
для учителей математики
Издается с 1992 г.
Выходит 10 раз в год

Издательство МЦНМО
БОЛЬШОЙ ВЛАСЬЕВСКИЙ ПЕР., 11,
МОСКВА, 119002

Издается совместно с
РОССИЙСКОЙ АССОЦИАЦИЕЙ
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Страничка журнала на сайте РАУМ:
raum.math.ru/node/179

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. РОСЛОВА
Ответственный секретарь:
Т. ЧЕРКАВСКАЯ
Редакторы: П. КАМАЕВ,
О. МАКАРОВА
Корректор: Л. ГРОМОВА
Верстка: Л. КУКУШКИНА
Дизайн обложки: Э. ЛУРЬЕ
Дизайн макета: И. ЛУКЬЯНОВ

8 (499) 241-89-79
mat@mccme.ru
mat@1september.ru

По вопросам распространения
обращаться по телефону (499) 745-80-31
e-mail: biblio@mccme.ru
Иллюстрации:
WWW.KLIPARTZ.COM
RU.PNGTREE.COM,
FREEPIK.COM, BY STARLINE,
BY PIKISUPERSTAR
Зарегистрировано ПИ №ФС77-66437
от 14.07.16 в Роскомнадзоре

Подписано в печать: 29.05.2021
Тираж: 3000 экз.
Для получения доступа
к журналу «Математика»
в электронном виде
необходима регистрация
школы в системе «СтатГрад».
Подробнее см. на сайте
statgrad.org/#2619
ISSN 2658-4042

Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул Интернациональная. д 100. корп. 8,
тел. +7 (831) 216-40-40.
Номер заказа

В НОМЕРЕ

Статья группы учителей школ РБ, в том числе учителя математики школы 37 Коневой Г.М.

К статьям, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

ШИРОКА СТРАНА МОЯ РОДНАЯ, НО И В НЕЙ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ПРЯМЫЕ!

Л. РОСЛОВА

Как приятно, должно быть, учителю, если его ученик становится продолжателем дела его жизни, выбирая профессию учителя. Еще приятнее, если ученик и творческую жилку учителя разглядел, включил его мировоззрение в свое понимание профессии и пытается реализовать уже свои творческие возможности.

Как здорово, если попадает такой студент к преподавателю, способному разглядеть и развить в нем это творческое начало, способность создавать новое и делиться им с окружающими.

И эта история не из фантастического рассказа, а из нашей действительности. В прошлом номере журнала мы опубликовали статью Вячеслава Евгеньевича Пыркова и его студентки-первокурсницы Даши Зивенко: сборник задач на сюжетах из сказок для учащихся 5–6-х классов, разработанный в рамках учебного проекта студентки. Нам сразу понравилось его содержание, прослеживалось понимание программного материала, возрастных возможностей детей, приятный стиль, хороший слог. Задачи были еще и иллюстрированы Дашей. Хороший пример качественной работы преподавателя, готовящего достойную смену.

Какого же было мое удивление, когда я прочитала в Facebook:

Николай Авилов

На майских выходных в гости заходила моя ученица Даша, теперь первокурсница мехмата ЮФУ, с подарочком! Я рад за нее, поздравил с первой публикацией! Вот результат проектной деятельности под руководством Пыркова Вячеслава Евгеньевича!

Вячеслав Пырков

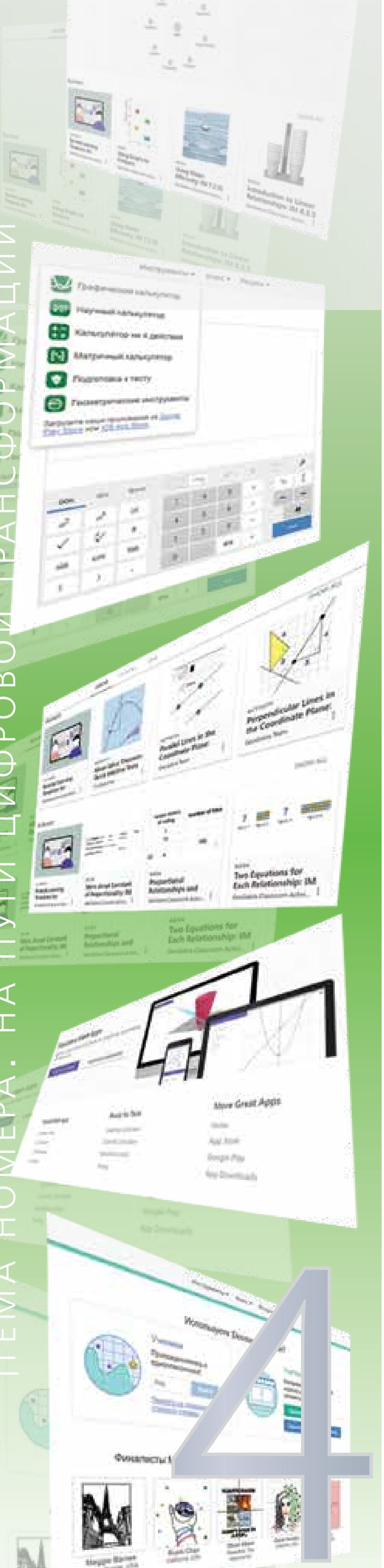
Даша умница! Спасибо Вам, Николай Иванович, за таких учеников! В этом году набираю группу бакалавров, всегда рады молодой смене из станицы Егорлыкская.

Вы, думаю, поняли, что пишет Николай Иванович Авилов, постоянный автор нашего журнала, ведущий замечательной рубрики о головоломках. Вот так неожиданно встретились на страницах журнала в одном номере два учителя и их ученица. В общем, связь времен и поколений педагогов.

Спасибо вам, коллеги, и за вашу работу, и за сотрудничество с журналом! Надеюсь на педагогическую поросль. Желаю Даше новых интересных проектов. Уверена, что из нее вырастет не только хороший учитель, но и хороший автор. А как же иначе, если ее окружают такие учителя?

Случалось ли такое с вами, дорогие друзья? Представьте своих учеников, вставших у доски рядом с вами, ставших вашим продолжением.

В. ЛЮБИМОВА,
г. Санкт-Петербург



ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ ПРОГРАММ GEOGEBRA, DESMOS И ИМ ПОДОБНЫХ

В процессе обучения большое значение имеет наглядное представление материала. В прошлом веке учителями математики широко использовались кодоскопы (графопроекторы) и эпидиаскопы, иногда — учебные фильмы для объяснения, например, задач на построение сечений. Сколько времени учитель тратил на то, чтобы аккуратно нанести нужные изображения на прозрачную пленку! С появлением компьютеров, проекторов и интерактивных досок создавать и демонстрировать такие материалы стало гораздо проще. Различные компьютерные программы и онлайн-сервисы позволяют создавать также динамические объекты, организовывать интерактивное взаимодействие обучающихся с ними, дают возможность учителю наблюдать этот процесс онлайн. Большое значение такие инструменты имели в период вынужденного перехода на обучение с использованием дистанционных технологий: с их помощью удобно наглядно представлять материал и, организовав онлайн-класс, следить за выполнением заданий учениками в режиме реального времени.

Рассмотрим сначала преимущества сервисов GeoGebra и Desmos и методику их использования в разных видах учебной деятельности на уроках математики.

С программой GeoGebra можно работать в двух вариантах: онлайн (непосредственно в браузере) и установив программу на компьютер (так называемая десктопная версия). Чаще всего учителя используют этот сервис при подготовке материалов к урокам для построения геометрических чертежей и графиков функций. Но значительно повышают эффективность образовательного процесса именно онлайн-инструменты, которые помогают организовать активную деятельность обучающихся, для этого им достаточно лишь пройти по присланной ссылке и выполнить задание. Аналогично используется и онлайн-сервис Desmos.

Применение GeoGebra и Desmos на уроках алгебры

В контексте требований ФГОС необходимо создавать условия для того, чтобы обучающиеся самостоятельно выдвигали гипотезы, формулировали выводы, проверяли свои предположения и т.п. При обучении с использованием дистанционных технологий, как правило, сокращается количество учебных часов (да и по санитарным правилам онлайн-урок короче по времени), поэтому возникает необходимость блочно-модульного предъявления материала, повышения доли самостоятельной работы обучающихся.

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

В таком случае помогают задания, в которых используются «подвижные» графики, где специальным движком (инструмент *Ползунок*) изменяются значения того или иного коэффициента.

Изучение свойств функций, графиков функций

Например, при изучении свойств квадратичной функции требуется исследовать зависимость вида графика от значения коэффициентов и записать вывод в тетрадь или прислать учителю в электронном виде. Примеры таких заданий представлены на рисунках 1 и 2. [1]

Если график квадратичной функции ученики обычно успешно строят и на бумаге, то больше затруднений у них возникает при построении графиков тригонометрических функций, особенно при изучении преобразований этих графиков. Построение нескольких графиков с разными коэффициентами на бумаге занимает много времени, а с помощью «движков» рассмотреть закономерности можно быстрее (рис. 3). [1]

Аналогичные задания могут быть созданы и в онлайн-сервисе Desmos (рис. 4). [2, 3]

Но использование компьютерных инструментов должно применяться обоснованно, не мешая получить навыки построения простейших графиков на бумаге.

Работа с обучающимися, имеющими ограниченные возможности здоровья

Онлайн-тренажеры по построению графиков также значительно упрощают работу с учениками, имеющими ограниченные возможности здоровья, например, с нарушениями опорно-двигательного аппарата. Такие дети просто физически не могут построить график на бумаге карандашом, но с помощью джойстика успешно справляются с любыми построениями. [4] Методически эти задания могут быть сконструированы по-разному: в одном — достаточно установить вершину параболы в нужную точку, в другом — с помощью движков задать направление ветвей и сжатие, в третьем — составить формулу, при верном ее составлении автоматически появится график. В любом случае такая работа оказывается намного эффективнее, чем использование GeoGebra для обычного построения графика функции по введенной формуле.

Такие же тренажеры есть и в онлайн-сервисе Desmos. [5]

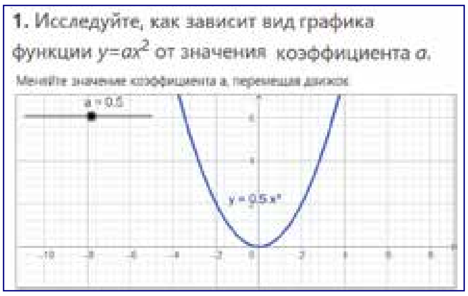


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

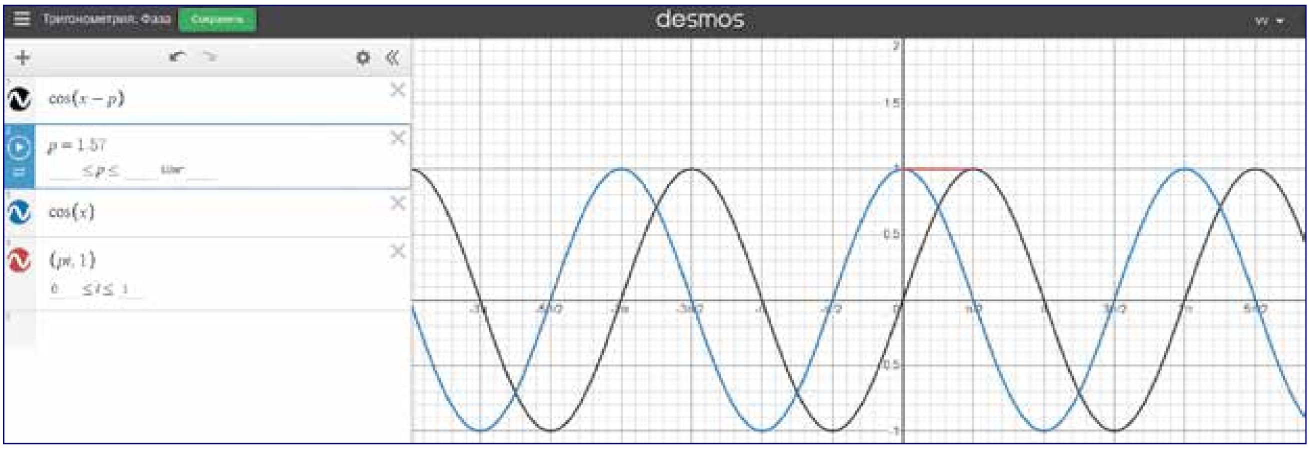


Рис. 4

Помощь в выдвижении или проверке гипотез при решении исследовательских задач

Задачи на мини-исследования могут предлагаться обучающимся как с целью подведения к новой теме, так и для более глубокого понимания материала, применения в нестандартных ситуациях.

Например, при изучении зависимости расположения графика квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

от значения коэффициентов в ее формуле можно обратить внимание учеников, что при изменении коэффициента b и постоянных значениях коэффициентов a и c вершина движется по параболе, и предложить найти ее уравнение.

Абсцисса вершины параболы

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ b = -2ax_0.$$

Ордината

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c,$$

после замены b получим:

$$y_0 = ax_0^2 - 2ax_0^2 + c = c - ax_0^2.$$

Таким образом, координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ всегда принадлежат графику функции $y = c - ax^2$. Можно построить графики на одной координатной плоскости и включить автоматическое изменение коэффициента b, нажав пиктограмму ▶. [6] Ученики могут убедиться в том, что эта зависимость выполняется при любых значениях коэффициентов.

Интересна также графическая интерпретация задачи, которая была предложена на XI Заочном конкурсе учителей математики в 2016 году: «На координатной плоскости XOY покрашены все прямые вида $y = ax + a^2$. Нарисуйте покрашенную область. Ответ обоснуйте» (рис. 5).

В сервисе GeoGebra можно задать движок для параметра, установив в настройках прямой *Показывать след*, получится сетка прямых. Их частота зависит от заданного шага изменений значений параметра. Если использовать настройку ползунка *Анимировать*, то нужная область будет закрашена полностью, но лучше предложить ученикам самим доказать алгебраически, что нужная область будет «сплошной» и задается неравенством $y \geq -\frac{x^2}{4}$.

Рассуждения при решении задач с параметрами

Пожалуй, чаще всего сервис GeoGebra используется для иллюстрации зависимости от параметра количества решений уравнений, систем уравнений и т.п. Это неудивительно: задачи с параметрами считаются одними из самых сложных экзаменационных заданий. Наглядное представление возможных случаев помогает и в поиске аналитического решения.

В GeoGebra можно строить и кусочно-непрерывные функции, что легко осваивают и ученики 9-го класса. С помощью этого инструмен-

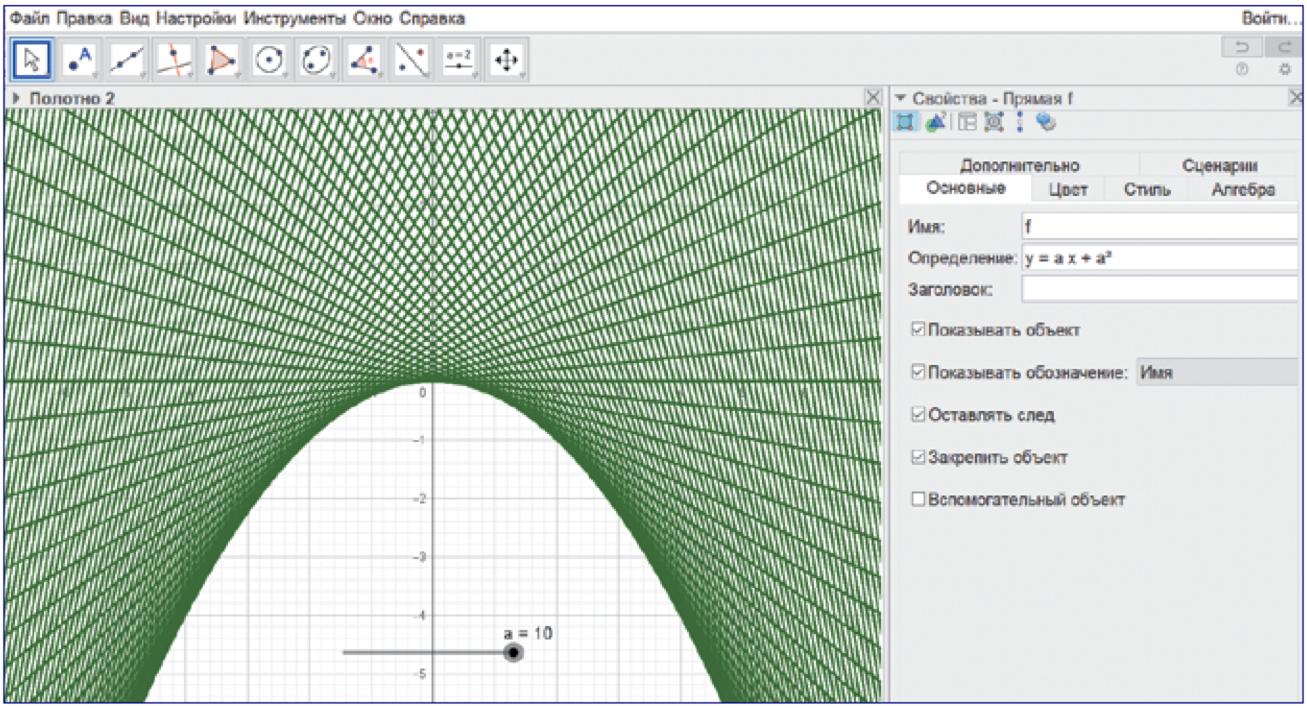


Рис. 5

та они знакомятся с графическим решением простейших задач с параметрами (рис. 6). [7, 8]

Старшеклассники могут самостоятельно исследовать и более сложные задачи с параметрами (рис. 7). [9]

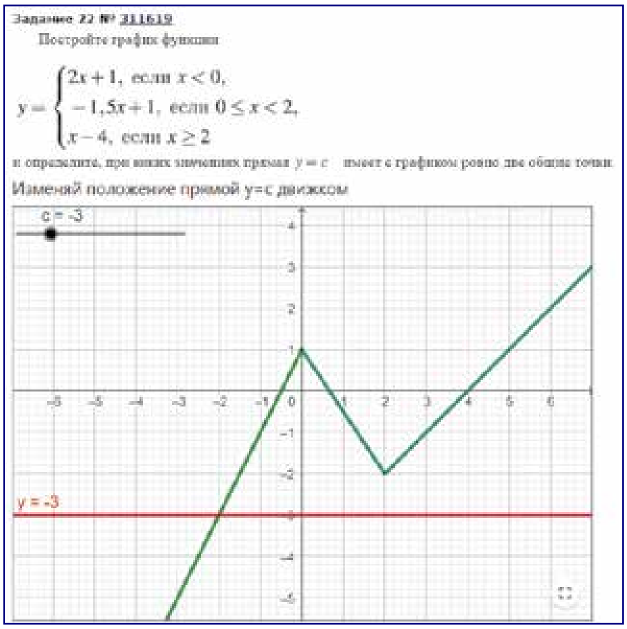


Рис. 6

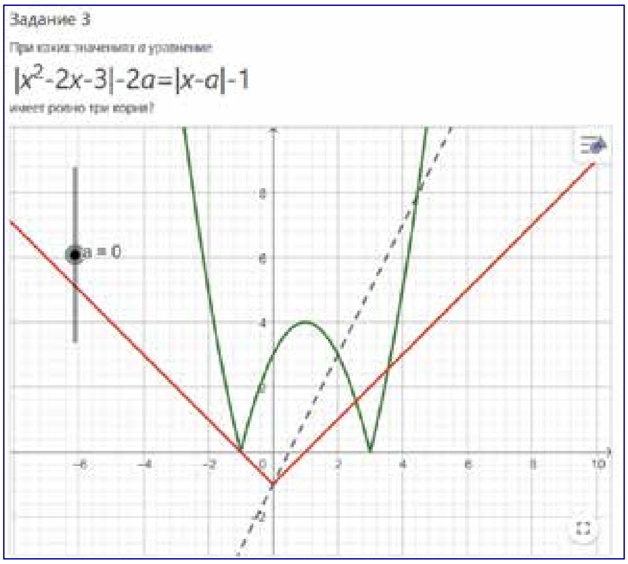


Рис. 7

Проверка найденных корней уравнений

Бывают ситуации, когда приведенный в учебном пособии ответ содержит опечатку, ученик сомневается — сам в чем-то ошибся или действительно опечатка. Если нет возможности спросить учителя, то быстро проверить найденные корни уравнения или решение неравенства можно, построив график функции с помощью GeoGebra или Desmos. Инструменты сервиса позволяют строить как кусочно-непрерывные функции, так и различные области, множества решений уравнений с двумя переменными и т.п.

Например, в задании 2 заочного конкурса учителей математики 2021 года предлагалось решить уравнение

$$\frac{1}{2^{\sin^2 x}}+\frac{1}{2^{\cos^2 x}}=\sin x+\cos x.$$

Проверим найденные корни $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$, построив график функции

$$y=\frac{1}{2^{\sin^2 x}}+\frac{1}{2^{\cos^2 x}}-\sin x-\cos x,$$

нули функции и являются корнями этого уравнения (рис. 8).

Заметим, что это преимущество также можно считать и недостатком, так как ученики могут использовать возможности программы не для проверки, а для подбора корней уравнения.

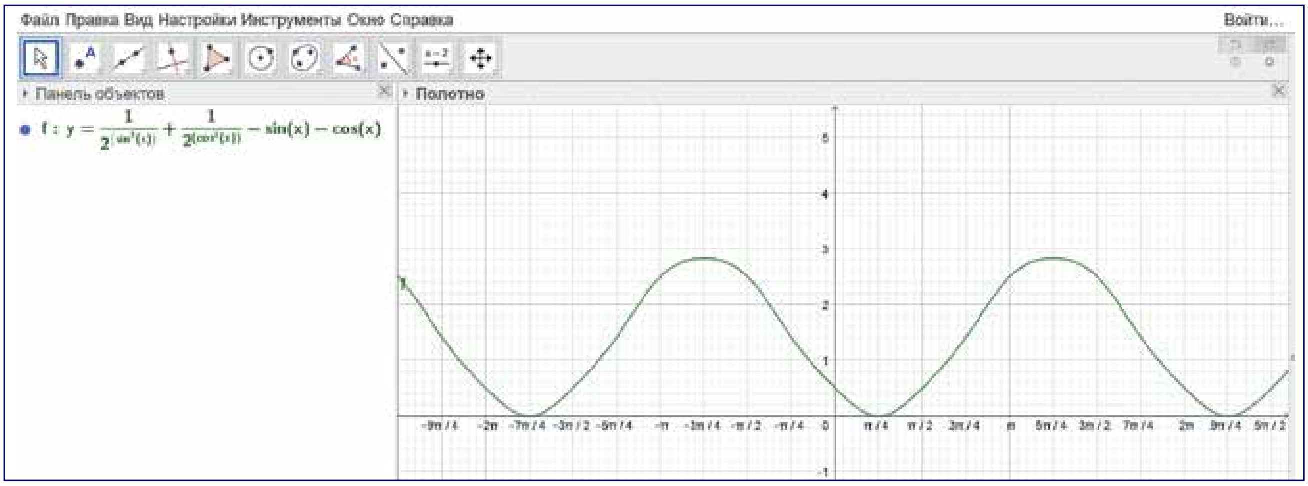


Рис. 8

Применение GeoGebra на уроках геометрии

Интерактивные инструменты для повышения мотивации

Применение GeoGebra для обучения геометрии эффективнее, если чертежи и другие инструменты будут интерактивными. Например, у детей вызывает интерес и такое простое задание, известное как «Танграм». [10] Такие онлайн-«Танграмы» удобнее, чем бумажные, потому что кусочки не теряются, также эту головоломку можно комбинировать с другими заданиями. Если организовать соревнование в онлайн-классе, то учитель будет видеть процесс выполнения задания каждым учеником (рис. 9).

Чертежи, иллюстрирующие закономерности

Очевидно, что с помощью GeoGebra (и аналогичного сервиса «Живая геометрия») удобно строить красивые геометрические чертежи. Хотя и говорят, что «геометрия есть искусство правильно рассуждать на неправильных чертежах» (Д. Пойя), но иногда качественно выполненный чертеж помогает увидеть верное решение задачи. В этом содержится и серьезный недостаток использования сервиса обучающимися: если ученик привыкает к решению задач с помощью компьютерных чертежей, то ему очень сложно будет рассуждать на экзамене, где чертежи строятся от руки (еще и без циркуля). Поэтому лучше использовать построение чертежей с помощью компьютерных инструментов лишь в случаях, когда это действительно необходимо.

Чертежи, построенные в GeoGebra, удобно использовать и для иллюстрации каких-либо интересных закономерностей (например, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции, проходит и через середины оснований). При этом для проверки того или иного факта можно применять инструменты для измерения длин или углов.

В качестве примера рассмотрим динамический чертеж к заданию 3 из заочного конкурса учителей: «В окружности проведена хорда AB, на которой отмечена точка X. В каждый из двух образовавшихся сегментов вписана окружность, содержащая точку X. Докажите, что отношение радиусов вписанных окружностей не зависит от выбора точки X». [11]

Двигая точку X, можно убедиться, что отношение радиусов вписанных в сегменты окружностей не зависит от положения точки X. Если изменить положение точек A и B (изменяя тем самым длину хорды или радиус окружности), то это отношение будет другим, но тоже постоянным при любом положении точки X (рис. 10).

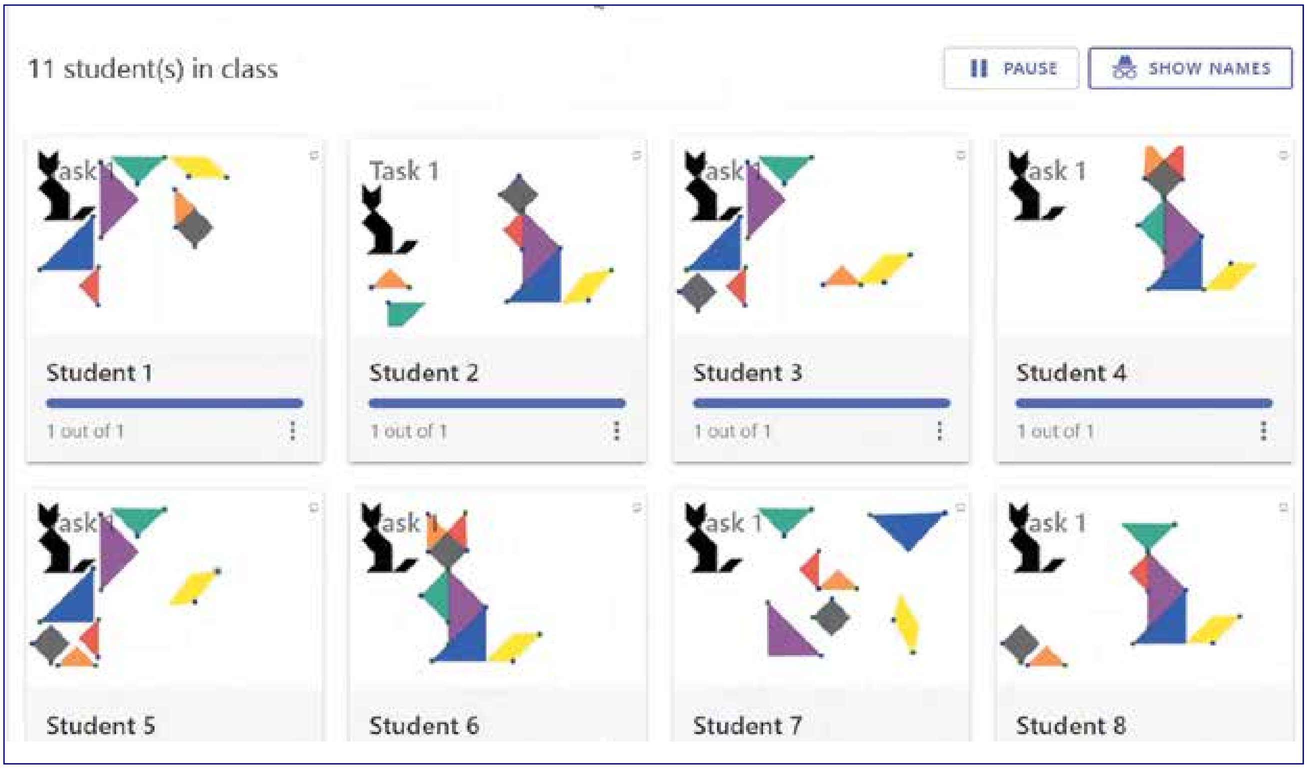


Рис. 9

Задачи на построение в планиметрии

Обучение решению задач на построение во время онлайн-урока затруднено тем, что учитель не может увидеть, как ученик выполняет построения на бумаге, а фотографировать (сканировать) каждый этап решения и отправлять учителю очень неудобно. Сэкономить время и повысить эффективность работы помогает создание интерактивных заданий в GeoGebra и предложение выполнить их классу прямо на онлайн-уроке.

Учитель сразу видит, у кого из учеников на каком этапе возникают затруднения, может подсказать, что-то объяснить. Такие задания могут использоваться и для формирующего оценивания (рис. 11). [12]

При конструировании таких заданий учитель выбирает, какие «чертежные инструменты» предоставить ученику в зависимости от цели задания. Например, для уменьшения количества шагов построения разрешить пользоваться не только *Циркулем* и *Линейкой*, но и инструментами *Прямая, параллельная данной*; *Прямая, перпендикулярная данной*; *Серединный перпендикуляр*; *Биссектриса угла*, а также давать задание «измерить углы» и т.п. За правильностью шагов построения учитель может наблюдать в онлайн-классе.

При решении задач на построение интерактивные чертежи также помогают обучающимся и на этапе исследования (рис. 12). Изменяя длины заданных отрезков (двигая за конец отрезка) уже после завершенного построения, можно посмотреть, как будет изменяться чертеж, сделать выводы о том, когда задача не имеет решения, как изменяется количество решений в зависимости от заданных элементов и т.п.

Задачи по теме «Преобразования плоскости»

Среди инструментов GeoGebra есть возможность задавать симметрию относительно точки и прямой, параллельный перенос, поворот, гомотетию, инверсию, поэтому сервис удобно использовать для динамической иллюстрации решения задач с применением этих преобразований плоскости. К сожалению, в учебнике мало задач по этой теме, показывающих, насколько в этом случае упрощается решение задачи по сравнению с другими способами. Пример одной из задач, на которой можно показать красоту решения таким способом, представлен на рисунке 13. [13]

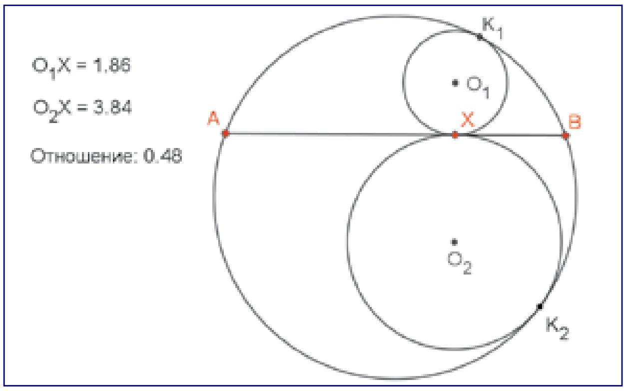


Рис. 10

Рис. 11

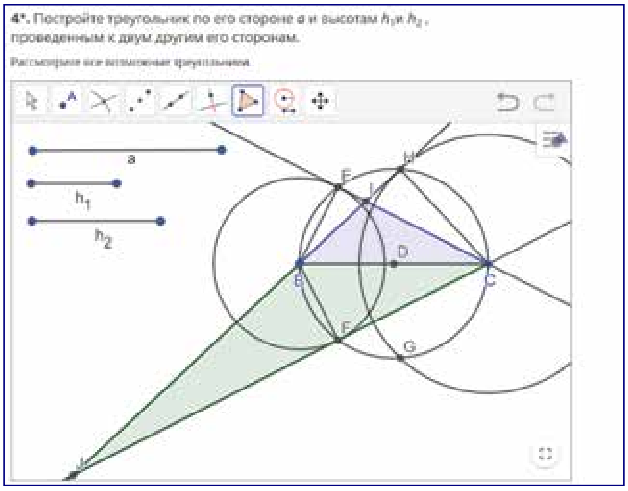


Рис. 12

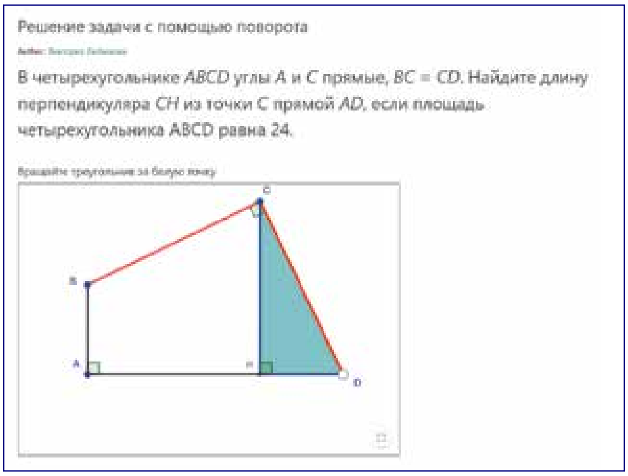


Рис. 13

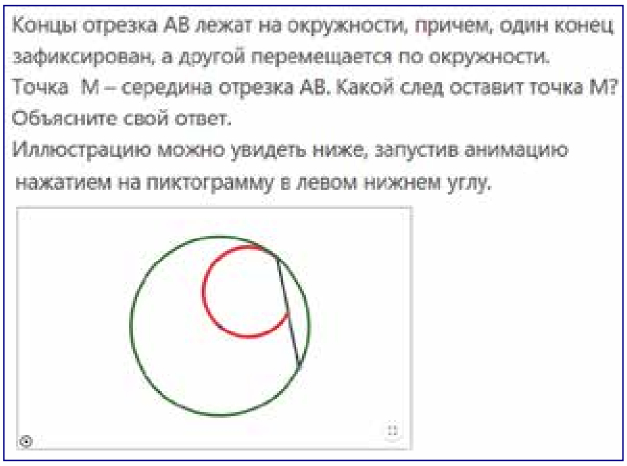


Рис. 14

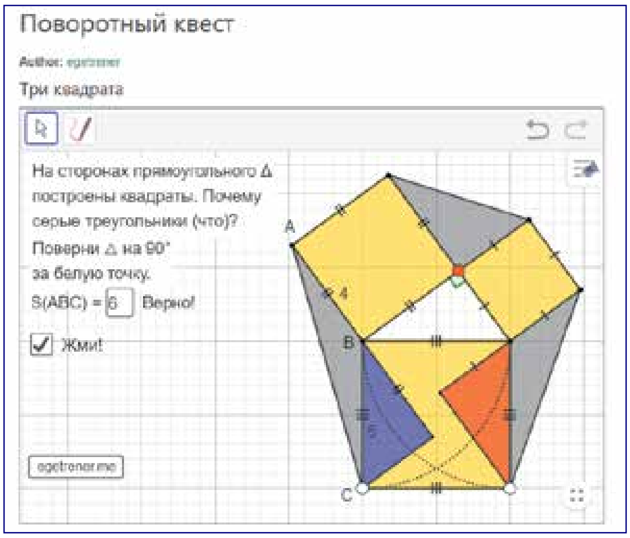


Рис. 15

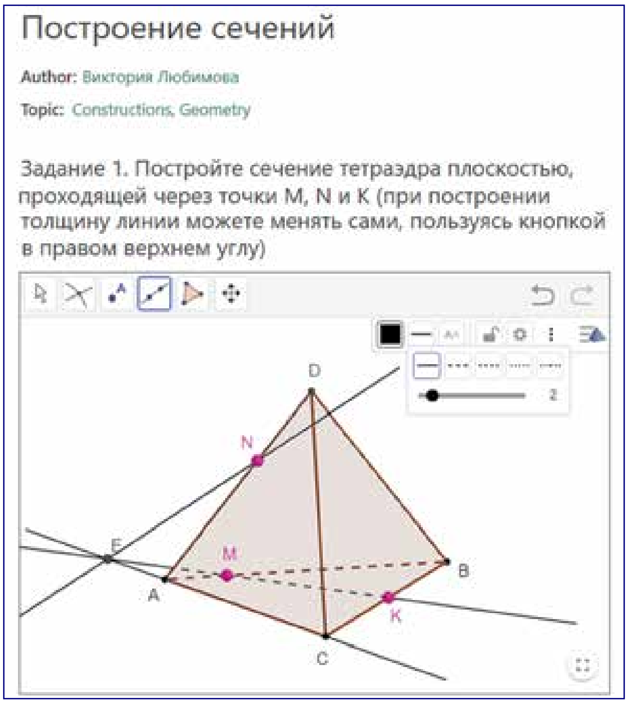


Рис. 16

Задачи по теме «Геометрическое место точек»

Такие задачи нередко вызывают затруднения у учеников, которые имеют недостаточно развитое абстрактное и образное мышление, поэтому динамические чертежи помогут в проверке гипотез (рис. 14). [14]

Иллюстрация закономерностей

Геометрические чертежи с подвижными элементами помогают ученикам выдвигать гипотезы и получать пошаговые подсказки при решении задач на вычисление требуемых величин (рис. 15). [15]

Построение сечений

Сервис GeoGebra стал незаменимым инструментом при обучении решению стереометрических задач, ведь построенный чертеж можно повернуть и рассмотреть с разных сторон, что помогает ребятам с невысоким уровнем пространственного мышления. GeoGebra позволяет легко и просто создавать задания на построение сечений многогранников (рис. 16). [16]

Для построения «методом следа» достаточно из инструментов предоставить *Прямую*, *Отрезок*, *Пересечение* и *Многоугольник* (для заливки построенного сечения), а для построения сечения параллелепипеда или призмы добавить инструмент *Прямая, параллельная данной*. К сожалению, толщину линии заранее настроить невозможно, ученик должен сам выбрать нужную толщину в настройках, для этого используются настройки стиля (пиктограмма в правом верхнем углу окна с чертежом).

Интересно, что инструмент *Пересечение* позволяет ученику осуществлять самопроверку. Например, если на приведенном чертеже (см. рис. 16) ученик ошибочно захочет поставить точку пересечения прямых *EN* и *BD*, которые на самом деле являются скрещивающимися, то у него это не получится.

Копируя созданное задание и изменяя расположение точек, учитель может быстро создать сразу несколько заданий на построение сечений, а предложив задания на онлайн-уроке — видеть выполнение каждым учеником в режиме реального времени.

Тренажеры по разным темам

Применение сервисов GeoGebra и Desmos отнюдь не исчерпывается построением графиков и геометрических чертежей. Для формирования устойчивых навыков нередко требуется выполнять большое количество тренировочных заданий, но решать по задачнику ученикам скучно,

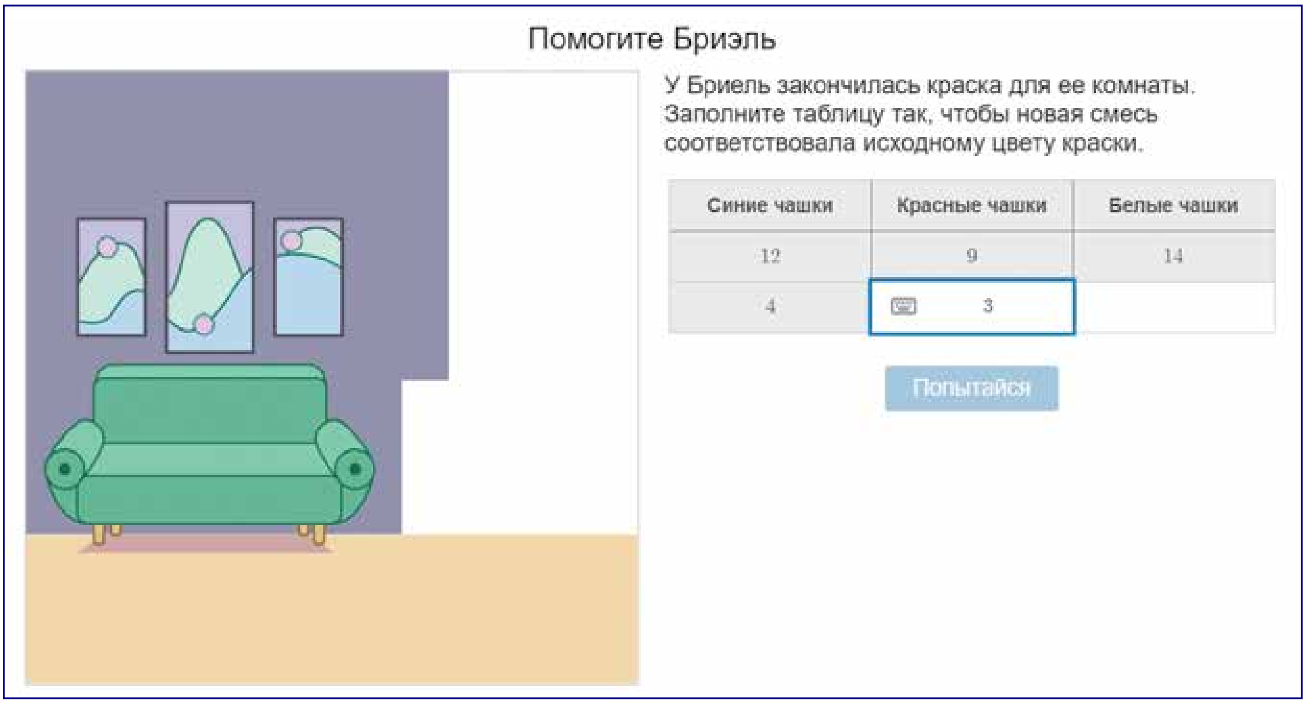


Рис. 17

поэтому повысить мотивацию можно с помощью онлайн-тренажеров.

В сервисе Desmos онлайн-тренажеры есть уже готовые, причем интересна также практическая направленность заданий, например, задачи о пропорциональном смешивании красок (рис. 17), хотя в некоторых тренажерах используется английский язык, но можно воспользоваться онлайн-переводом в браузере. [17]

После ввода ответов стена «закрашивается» и видно — тот же оттенок или нет.

В сервисе GeoGebra тренажеры создают сами пользователи, например, тренажер О.И. Себедаш позволяет совершенствовать навык решения простейших линейных уравнений (рис. 18). [18]

Этот тренажер «бесконечный»: ученик может играть столько, сколько захочет, и не ради отметки, а чтобы научиться решать без ошибок. При желании может прислать учителю скриншот своих достижений — сколько получилось верных ответов из скольких попыток, а если учитель дал задание через GeoGebra Classroom, то увидит результат онлайн.

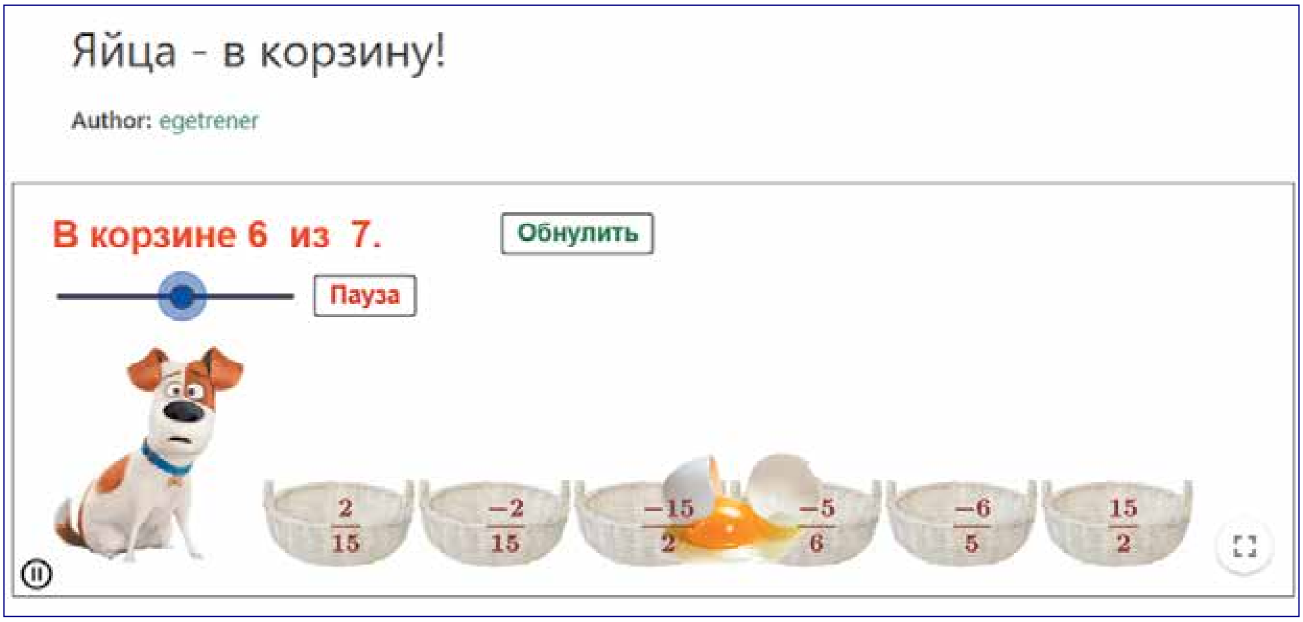


Рис. 18

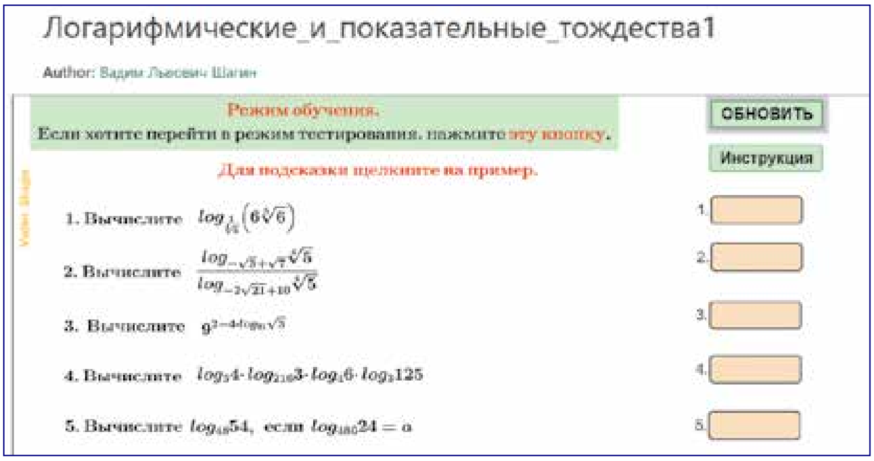


Рис. 19

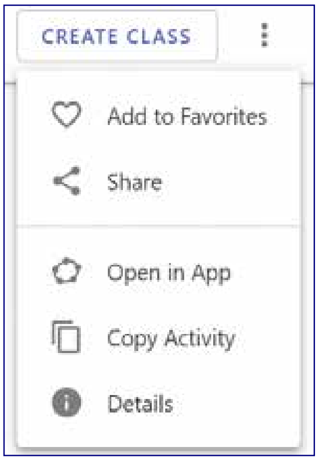


Рис. 20

Более серьезные тренажеры для подготовки к ЕГЭ создает В.Л. Шагин (рис. 19). [19]

В его тренажерах два режима: в режиме обучения ученик может, щелкнув по заданию, посмотреть алгоритм его решения, затем перейти в режим тестирования, где за безошибочное выполнение заданий получит «приз» (ссылку на картинку, музыкальный фрагмент или забавный видеоролик).

Тренажеры могут предлагаться ученикам не только в период дистанционного обучения, но и для поддержки очного обучения: в качестве домашнего задания или для слабоуспевающих.

Удобство обмена материалами и назначения ученикам

Также важным преимуществом онлайн-сервиса GeoGebra является возможность обмена созданными материалами между учителями и создание онлайн-класса. Материалы могут создавать и ученики друг для друга.

Чтобы скопировать понравившийся материал в свой аккаунт, достаточно в правом верхнем углу нажать на три точки и выбрать *Copy Activity*. Также можно предлагать ученикам пройти по ссылке (*Share*), но в этом случае проконтролировать выполнение задания невозможно (рис. 20).

Чтобы наблюдать за ходом выполнения заданий учениками, можно создать класс с помощью инструмента *Create Class*, тогда учителю будут видны все действия учеников (рис. 21).

GeoGebra как конструктор электронного урока

В GeoGebra существуют инструменты, которые позволяют использовать сервис в роли конструктора электронных уроков (рис. 22).

В текстовом блоке можно расположить проблемное задание, в апплете — создать динамическую модель, которая поможет проверить гипотезу или сделать выводы. Видеоролик с объяснением нового материала дополнят файлы в формате pdf, ссылки на дополнительные web-ресурсы. В качестве инструментов контроля есть возможность ученику делать записи в Note или давать ответы на задания, созданные с помощью инструмента Question.

Некоторые выводы

Таким образом, использование сервисов GeoGebra и ему подобных *уместно* в следующих видах учебной деятельности:

– выделение и формулирование познавательной цели;

– составление плана и последовательности действий;

– преобразование практической задачи в познавательную;

– построение математической модели по условию задачи;

– анализ графиков, чертежей, таблиц, схем;

– объяснение наблюдаемых явлений;

– формулирование и проверка гипотез, вывод и доказательство математических фактов, исследование проблемных задач;

– совершенствование навыков решения задач по конкретной теме;

– создание и преобразование моделей и алгоритмов для решения задач;

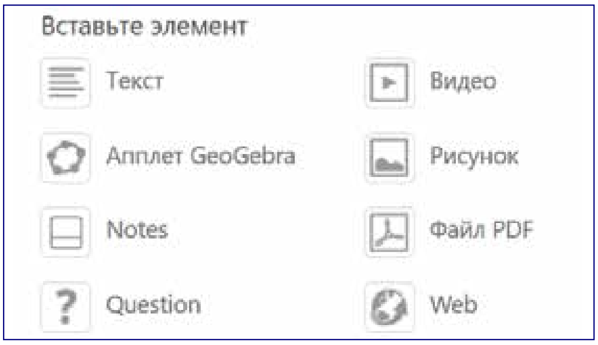


Рис. 22

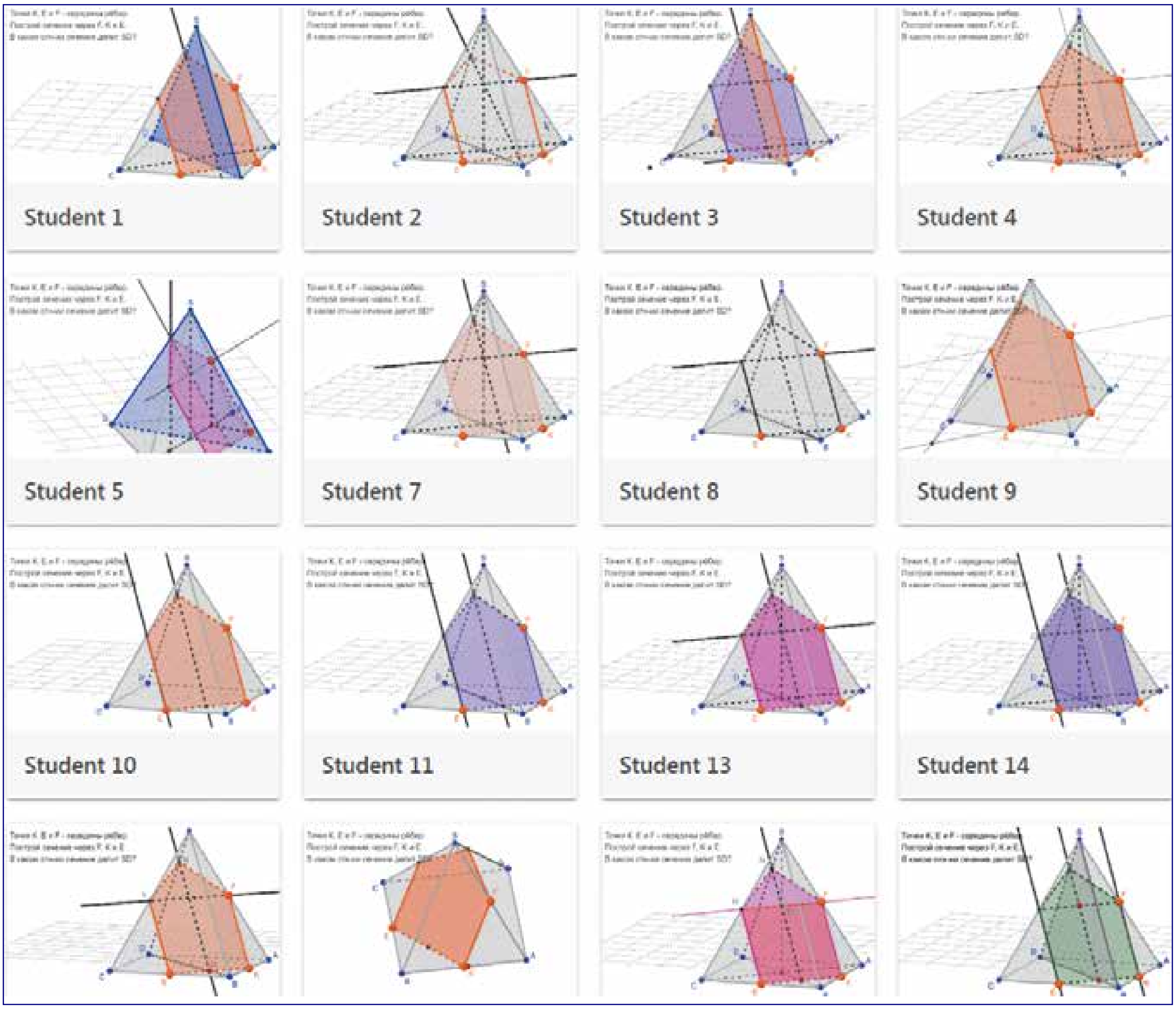


Рис. 21

– систематизация изученного материала;

– самостоятельная работа с электронными образовательными ресурсами (изучение материалов электронного урока);

– прогнозирование возможности получения конкретного результата при решении задачи;

– сличение способа действия и его результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений и отличий от эталона;

– внесение необходимых коррективов в действие после его завершения на основе его оценки и учета сделанных ошибок;

– коллективный поиск решения задачи, взаимообучение;

– концентрация воли для преодоления интеллектуальных затруднений.

Использование таких сервисов нежелательно в следующих видах деятельности:

– при обучении решению уравнений графическим способом, когда ученикам необходимо освоить построение графиков линейной и квадратичной функций на бумаге;

– самооценка и самоконтроль;

– если ученики используют график функции для подбора корней уравнения вместо его решения;

– при оформлении решения задач, когда ученики привыкают строить чертежи с помощью компьютерных инструментов, потом затрудняются на экзамене построить чертеж от руки (на экзамене нет даже циркуля);

– при излишнем увлечении игровыми тренажерами или если в тренажере оформление привлекает больше внимания, чем содержание: все хорошо в меру, поэтому пользоваться такими инструментами необходимо с осторожностью;

– если ученики бездумно проводят линии при построении сечения (если ошибочно попытаются поставить точку пересечения скрещивающихся прямых, то программа не дает это сделать, могут перебором искать нужные прямые).

Л. КАРБАИНОВА,
И. КУПРИЯНОВА,
В. ТРОФИМОВА, Г. КОНЕВА,
С. ЖАРКОВА, Н. ГЛЕБОВА,
Республика Бурятия

Фото предоставлены авторами

ПРОЕКТ «ПРИБАЙКАЛЬСКАЯ ЦИФРОВАЯ ШКОЛА»

С 2019 года в России реализуется национальная программа «Цифровая экономика». Руководство нашей страны определило курс на построение цифровой экономики, основанной на активной реализации цифровых технологий в производстве, государственном управлении, а также в таком аспекте социально-экономической деятельности, как образование.

Поэтому в настоящее время в качестве одной из траекторий инновационного развития отечественного образования признана его цифровая трансформация, которая предполагает активное использование цифровых технологий, инструментов, ресурсов в образовательном процессе. А также формирование у учащихся понимания значимости цифровых технологий для развития современного общества в цифровом мире, готовности к их овладению и использованию в практической жизнедеятельности и профессиональной деятельности.

Творческой группой педагогов Турунтаевской школы № 1 Прибайкальского района Республики Бурятия был разработан проект «Прибайкальская цифровая школа», направленный на знакомство учащихся с цифровыми технологиями, а также формирование у них цифровых навыков. В конце 2019 года Турунтаевская школа № 1 выиграла федеральный конкурс на предоставление грантов из федерального бюджета в рамках федерального проекта «Кадры для цифровой экономики национальной программы «Цифровая экономика» на реализацию проекта.

Цель проекта состояла в разработке и презентации педагогической общественности комплекта учебно-методических материалов, отражающих опыт работы школы по формированию у обучающихся цифровых навыков: навыков создания цифрового контента, осуществления коммуникации и сотрудничества в цифровом контенте, работы с информацией в цифровом контенте, безопасности в цифровом контенте.

В ходе реализации проекта были разработаны и апробированы: учебно-методические материалы, методические рекомендации, отражающие подходы (системно-деятельностный, практико-ориентированный, метапредметный), стратегии (в рамках организации и проведения уроков, внеурочной деятельности), формы (цифровые уроки, практики, фестивали, в рамках которых проводятся обучающие презентационные площадки, мастер-классы, конкурсы), методы (проекты), приемы (учебные контракты, экспертные карты) формирования и развития у учащихся цифровых навыков и знакомства их с цифровыми технологиями цифровой экономики.

В качестве основных форм организационно-технологического и методического обеспечения реализации разработанных учебно-методических материалов и рекомендаций были определены:

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

Цифровые уроки. Это уроки, на которых обучающиеся знакомятся через предметное содержание учебных дисциплин школьного курса с цифровыми технологиями, ресурсами, инструментами, устройствами. Например, на уроке математики ребята, решая составленные педагогом математические задачи, знакомятся с такой цифровой технологией, как робототехника. Из текста задач узнают о промышленных роботах, отрабатывают навыки решения задач на проценты и определение объема выполненной работы.

Цифровые мини-курсы. Мини-курсы непродолжительны по времени, максимальный объем не превышает 6 часов. Направлены они на знакомство обучающихся с цифровыми технологиями. Учебная деятельность ребят на цифровом мини-курсе выстраивается вокруг одной из цифровых технологий. Такие курсы соединяют в себе идею предметности и одновременно НАД-предметности, метапредметности. В проектировании, разработке и организации проведения курса обычно задействованы два-три учителя-предметника. Например, в рамках мини-курса «Технология 3D-печати» учащиеся знакомятся с данной цифровой технологией, с примерами ее применения в различных предметно-ориентированных профессиональных сферах: технологии, истории, биологии (медицина), мировой художественной культуре (МХК).

Цифровые практики. Это форма организации внеурочной деятельности, сопровождающаяся формированием у обучающихся цифровых навыков. Цифровые практики организуются на базе социальных партнеров школы, где учащиеся знакомятся с цифровыми технологиями, ресурсами, инструментами, устройствами, используемыми в различных сферах профессиональной деятельности. В качестве примеров цифровых практик, которые прошли старшеклассники, можно привести такие, как «Электронные расчеты в банковской системе», «Цифровые сервисы в пенсионном обеспечении».

В рамках реализации проекта педагогами школы были подготовлены методические разработки: цифровых уроков, программ цифровых практик, цифровых мини-курсов, опыт проектирования, организации и проведения которых был представлен через систему следующих запланированных методических событий — презентационная площадка, мастер-классы, переговорная площадка, стажировки, консультации.

Одним из масштабных методических событий в реализации гранта стала республиканская **научно-практическая онлайн-конференция «Профессиональная деятельность учителя в цифровом образовательном пространстве: проблемы, пути решения»**, которая прошла в декабре 2020 года. Конференция была организована совместно с кафедрой естественно-математических дисциплин Бурятского регионального института образовательной политики и состояла из четырех секций.

Секция 1. Профессионализм современного педагога в условиях цифрового обучения: от очного до удаленного и смешанного форматов взаимодействия «учитель-ученик». На секции обсуждались следующие вопросы:

– креативные образовательные технологии в цифровой среде;

– цифровая трансформация урока;

– менеджмент образовательных событий в цифровой среде;

– медиапедагогика;

– цифровая грамотность современного учителя, ученика;

– формирование профессиональных компетенций педагогов в условиях цифровизации образования;

– формирование цифровой компетентности обучающихся в рамках ФГОС.

Секция 2. Цифровой мир. Цифровое образование. Цифровые инструменты учителя. Вопросы для обсуждения:

– современные возможности цифровых технологий для школьного образования;

– администрирование цифровой школы;

– цифровые технологии как средство создания доступного и качественного образования;

– организация удаленного обучения в сельской школе;

– методика и дидактика образовательного процесса с применением цифровых технологий, электронного обучения и дистанционных образовательных технологий;

– цифровые инструменты в работе учителя: из опыта работы;

– сетевые образовательные события;

– повышение квалификации учителя в цифровом мире.

Секция 3. Электронный образовательный контент в урочной и внеурочной деятельности. На секции обсуждались следующие вопросы:

– организация образовательного процесса на основе использования электронных образовательных платформ;

– электронные гаджеты на уроке и во внеурочной деятельности;

– мобильное обучение;

– онлайн-сервисы в решении педагогических задач;

– электронные образовательные ресурсы.

Секция 4. Урок цифры: методические аспекты. На секции обсуждались следующие вопросы:

– деятельность педагога и обучающихся в открытом образовательном пространстве;

– сетевые образовательные сообщества как средство профессионального роста педагога;

– неформальное образование в сети интернет;

– психологические особенности взаимодействия субъектов образовательного процесса в цифровом мире;

– технологии образования будущего;

– проектная деятельность в сети интернет.

В конференции приняли участие свыше 600 педагогических работников образовательных учреждений различных предметных областей, специалисты муниципальных органов управления образования Республики Бурятия, Монголии, Москвы, Санкт-Петербурга, Забайкальского края, Иркутской области. На конференции выступили методисты платформ: Учи.ру, Яндекс-Класс, представители издательства «Просвещение». На сайте конференции опубликованы видеозаписи работы секций и материалы участников (sites.google.com/view/it-konf).

Организованную интернет-конференцию можно рассматривать как площадку для совместного обсуждения педагогами Республики Бурятия и других регионов вопросов использования цифровых образовательных ресурсов, инструментов, устройств в современной образовательной практике.

Приводим некоторые запомнившиеся выступления участников конференции.

СЕКЦИЯ 1

И. КУПРИЯНОВА,
с. Хоринск,
Республика Бурятия

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ СОБЫТИЕ КАК НОВАЯ ФОРМА СОВМЕСТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ДЕТЕЙ, РОДИТЕЛЕЙ И ПЕДАГОГОВ

Большие изменения в обществе, а также в образовании, заставляют задуматься нас, учителей, о содержании и формах организации образовательного процесса. Одной из интереснейших форм является образовательное событие, в ходе которого дети применяют базовые знания и получают новые знания, развивают свои творческие способности в активной совместной деятельности с учителем. Очень важно правильно выстроить взаимодействие «учитель-ученик». От этого зависит успех обучения и воспитания.

Цель образовательного события — получение знаний через нетрадиционные формы, повышение познавательной активности учащихся, воспитание ответственности, умения работать в паре, группе, в коллективе. И, конечно, оно должно быть организовано с учетом интересов детей, предполагать развитие их творческих способностей и проявление инициативы. Детям интересно то, что выходит за рамки обычной школьной жизни, поэтому в каждом образовательном событии должна быть какая-то изюминка, притягивающая ребят, какой-то эффект неожиданности, поэтому сценарий образовательного события часто разрабатывается вместе с учениками. Учитель только направляет их деятельность. *Образовательное событие* — это то, что привлекло внимание, произвело впечатление, взволновало, потрясло и в то же время вызвало желание получить новые знания.

В ходе подготовки к образовательному событию дети должны знать, что они делают, зачем, с какой целью, нужно ли им это. Только тогда будет мотивация на учебную деятельность.

Подготовка к образовательному событию — это творческий процесс и совместная деятельность педагога, детей, родителей, где каждый находит себе применение и имеет возможность открыть дополнительные возможности своих личностных качеств.

Ценность образовательного события в том, что оно создает целостное единство образовательного процесса, а его содержание отражает картину всего изученного, приобретенного, сформированного в творческой, речевой, культурной, эмоциональной сфере. В образовательном событии также представлена целостная картина личностных качеств ребенка — это работоспособность, настойчивость, исполнительность, чувство ответственности, личная дисциплина, инициатива, любознательность, творчество, умение работать в команде... А учитель создает условия для их развития.

Из своего опыта работы я хотела бы поделиться технологией проведения образовательного события по теме «Витамин С — источник здоровья».

Образовательное событие «Витамин С — источник здоровья»

Подготовительный этап

Данное образовательное событие готовилось в течение двух недель и было приурочено к школьному конкурсу образовательных событий. Творческой группой учителей (предметные области математика, биология и технология) была выбрана тема образовательного события и выбран класс (7-й класс, в классе 24 человека). Был составлен сценарий (технологическая карта) образовательного события, подготовлены раздаточные материалы, карточки, составлены кейсы для работы учащихся.

Основной этап

Образовательное событие проводилось в урочное время на уроках математики и биологии, время проведения 90 минут. Класс был разделен на четыре группы по 6 человек. На каждом столе находился ноутбук, кейс с раздаточным материалом: инструкция по работе в группе, карточка с таблицей «Содержание витамина С в продуктах, в мг на 100 г», карточка с задачами, карточка «Оцените свою работу».

Инструкция по работе в группе

1. Изучите таблицу «Содержание витамина С в продуктах», назовите три продукта с наибольшим содержанием витамина С.

Карточка «Содержание витамина С в продуктах, в мг на 100 г»

№	Наименование продукта	Содержание витамина С
1	Кресс-салат	542
2	Лук репчатый	10
3	Капуста брокколи	102
4	Капуста белокочанная	76
5	Капуста квашенная	69
6	Картофель вареный очищенный	14
7	Картофель вареный в мундире	20
8	Морковь	19
9	Редька	136
10	Перец сладкий	250
11	Лимон	40
12	Киви	40
13	Бананы	10
14	Гранат	5
15	Яблоко	30
16	Апельсин	60
17	Смородина черная	250
18	Брусника	15
19	Шиповник	1200
20	Облепиха	200

2. Решите предложенные задачи и сформулируйте правила сохранения витамина С в пище.

Пример карточки с задачами

1. В 100 г картофеля после сбора урожая содержится 25 мг витамина С, а зимой его содержание уменьшается до 40%. Сколько витамина С можно получить зимой из 200 г картофельного пюре?

2. В 100 г свежей моркови содержится 19 мг витамина С, если варить ее в эмалированной посуде, в ней остается 60% витамина С, если варить в железной, то останется $\frac{1}{5}$ от первоначального количества. В какой посуде лучше варить овощи, чтобы сохранить больше витамина С?

3. Приготовьте из предложенных продуктов блюда, содержащие максимальное количество витамина С, обоснуйте выбор продуктов для салата.
4. Заполните нужные слайды в презентации.
5. Сделайте выводы и оцените свою работу.

Карточка «Оцените свою работу»

Критерии самодиагностики	Да	Нет
Я узнал, для чего нужен витамин С		
Я узнал, в каких продуктах витамин С содержится в большом количестве		
Я научился готовить блюда с максимальным содержанием витамина С		
Я узнал, как сохранить витамин С в продуктах		
Я умею решать математические задачи		
Я умею искать нужную информацию и использовать ее для решения поставленных задач		
Я умею создавать презентации в PowerPoint		
Мне понравилось работать в команде		

За каждой группой был закреплен эксперт — учащийся 10-го класса, который оценивал работу группы. Ребята в группе сами распределили, кто за что отвечает. На ноутбуках были макеты презентаций, куда дети сами вставляли свой материал. В ходе самостоятельной работы ребята изучили таблицу «Содержание витамина С в продуктах», назвали по три продукта с наибольшим содержанием витамина С. Решили предложенные задачи и сформулировали правила сохранения витамина С в пище. Так, учащиеся выяснили, что при приготовлении пищи в эмалированной посуде большая вероятность сохранения витамина С в продуктах. Девочки самостоятельно приготовили блюда с максимальным содержанием витамина С — овощные салаты, фруктовые коктейли. Каждая группа оформила свои выводы в виде презентации и выступила с защитой своей работы в произвольной форме. В конце группы провели самооценку.

Подведение итогов

Данное образовательное событие оценивала комиссия, в составе которой были десять учителей и четверо родителей. Оценивание происходило по следующим критериям:

1. (*10 баллов*) Конструирование образовательного события:

а) (*3 балла*) интеграция образовательных областей;

б) (*3 балла*) постановка учебной задачи, направленной на эмоциональную вовлеченность;

в) (*2 балла*) педагогические способы организации совместной образовательной деятельности;

г) (*2 балла*) возможность выбора способов деятельности обучающихся.

2. (*10 баллов*) Направленность на получение образовательных продуктов:

а) (*2 балла*) *предметных*, ориентированных на формирование конкретных знаний и умений;

б) (*5 баллов*) *метапредметных*, направленных на освоение новых способов образовательной деятельности;

в) (*3 балла*) *личностных*, предполагающих ценностно-смысловую ориентацию обучающихся.

3. (*10 баллов*) Степень самостоятельности учащихся:

а) (*5 баллов*) степень «погружения» в электронную среду (применение только демонстрационных или интерактивных презентаций, деятельность учащихся по выполнению заданий компьютерного практикума, осуществление оценочных и рефлексивных действий в электронной образовательной среде и т.п.);

б) (*2 балла*) умение работать со справочным материалом;

в) (*3 балла*) качество выступлений при защите образовательного продукта.

СЕКЦИЯ 1

В. ТРОФИМОВА,
с. Турунтаево,
Республика Бурятия

ЦИФРОВАЯ ПРАКТИКА «ЭЛЕКТРОННЫЕ РАСЧЕТЫ В БАНКОВСКОЙ СИСТЕМЕ»

Неотъемлемой частью хозяйственной жизни человеческого общества на этапе рыночных отношений и его развития становятся деньги. Деньги в таком обществе необходимы для расчетов за произведенную продукцию, оказываемые услуги. При этом расчеты могут принимать как наличную, так и безналичную форму. Денежные расчеты с использованием безналичных расчетов гораздо более выгодны со всех точек зрения. Они значительно ускоряют процесс оплаты, упрощают его, способствуют снижению издержек обращения. Операции по безналичным расчетам осуществляются при помощи цифровой техники.

Общая идея практики заключалась в знакомстве учащихся с использованием цифровых технологий, цифровых устройств в банковской сфере и профессиональной деятельности; с возможностями осуществления безналичных расчетов при помощи пластиковых карт; формирование цифровых навыков, знаний.

Социальным партнером школы, на базе которого проводилась практика, стал филиал «Россельхозбанка» в с. Турунтаево.

Цель практики. Знакомство учащихся с использованием цифровых технологий в банковском деле; показать возможности операций в век цифровизации.

Задачи. Раскрыть функции и задачи платежных и расчетных систем с применением цифровой техники; оценить платежную систему «Россельхозбанка» (возможность осуществлять операции не выходя из дома, моментальность транзакций, доступность, локализация).

Планируемые образовательные результаты. Создание продукта практики — инфографики; расширение знаний о цифровых технологиях через практическую деятельность; повышение интереса к робототехнике; стремление определиться в выборе профессии, связанной с банковским делом.

Содержание программы практики

Тема 1. «История возникновения цифровых устройств, робототехники, пластиковых карт в банковском деле»: история возникновения пластиковых карт; виды пластиковых карт; операции с пластиковыми картами; российский опыт использования пластиковых карт; появление роботов-сотрудников в российских банках и их функциональные обязанности. Задание. Создать презентацию «Пластиковые карты: история возникновения, виды».

Тема 2. «Влияние цифровизации на российский карточный бизнес»: роботизация — важная финансовая технология в работе современного банка; актуальность цифровизации в сфере банковских карт; современные тенденции в развитии российского карточного бизнеса. Задание. Создать презентацию «Цифровизация и российский карточный бизнес».

Тема 3. «Роль электронных денег в развитии национальной платежной системы России»: что такое электронные деньги; функции электронных денег, классификация их форм; расчетно-платежный инструмент «электронные деньги» — элемент национальной платежной системы России. Задание. Создать презентацию «Роль электронных денег в развитии национальной платежной системы России».

Одним из важных моментов практики было занятие на предприятии. Наша работа в филиале «Россельхозбанка» началась со встречи с руководителем филиала. Он продемонстрировал имеющиеся цифровые устройства банка и разъяснил, в чем заключается его работа. После этого заведующая кредитным отделом разъяснила процесс выбора на выгодных условиях кредитных карт и погашения по ним займов, если возникла необходимость воспользоваться данным банковским продуктом.

Далее участники практики самостоятельно выполнили ряд предложенных банковских операций.

В ходе проведенной работы учащиеся узнали, каким образом цифровые устройства банка используются в работе, научились выполнять операции по безналичному расчету, узнали, как обеспечивается своевременная обработка платежей и лояльность карты и как развиваются международные связи банковских учреждений.

Участники проекта организовали поиск информации и представили задачи для остальных участников группы. Вместе мы решили эти задачи, используя информацию, полученную на занятии в банке.

Задачи

1. За внесение наличных банк берет комиссию 1,5%, но не менее 50 рублей. Чему равна минимальная сумма внесения наличных? Сколько платит пользователь карты, внося наличными ниже рассчитанной суммы?

2. На карте доступно около 9 тыс. руб., за снятие берется комиссия 3%, но не меньше 300 руб.

а) Сколько процентов составит комиссия, если снять 2 тыс. руб.?

б) В каком размере нужно заплатить комиссию и сколько это составит процентов, если снять 6 тыс. руб.?

в) Сколько пользователь карты переплатит банку в виде комиссии за снятие наличных, если будет снимать три раза по 2 тыс. руб., вместо 6 тыс. руб. за один раз?

3. У клиента банка на руках кредитная карта с лимитом в 100 тыс. руб., процентная ставка по ней 18,9% годовых. Годовое обслуживание карты — 700 руб. в год. Минимальный ежемесячный платеж по карте — 5% от суммы задолженности. Рассчитайте платеж, который необходимо будет внести до 20 марта (за февраль), если 100 тыс. руб. с карты были потрачены единовременно.

4. Представьте, что вы оформили кредитную карту в одном из банков и ни разу ей не воспользовались. Кредитный лимит был установлен в размере 40 тыс. руб. У вас сломался компьютер, и вам срочно понадобилось купить новый. Вы решили воспользоваться кредитной картой и приобрели компьютер за 30 тыс. руб., расплатившись с помощью карты.

а) Какую сумму вы взяли в кредит у банка, совершив оплату с помощью кредитной карты?

б) Что будет, если по истечении установленного срока вы не внесете платеж по кредиту?

в) Может, было бы выгоднее сначала снять деньги в банкомате с кредитной карты, а затем расплатиться ими в магазине? Объясните свой ответ.

Обязательным условием организации цифровой практики было оформление документации. В ходе практики с каждым учащимся заключался контракт на выполнение фрагмента исследовательского проекта.

Учащейся Максим Баев, ученик 9-го класса, с одной стороны, и Турунтаевская школа в лице учителя В.А. Трофимовой, с другой стороны, заключают настоящий учебный контракт на выполнение индивидуального фрагмента проекта.

Индивидуальное задание	*Контрольные сроки*	*Выполненные действия*
Использование цифровых технологий в банковском деле	*25.12.2019*	*Изучены материалы интернет-ресурсов*

Итоговым продуктом практики каждого ученика являлась инфографика на тему банковских карт. Инфогра́фика — это графический способ быстро и четко преподнести сложную информацию. Для создания инфографики участникам был предложен выбор из шести сервисов. Ребята выбрали бесплатную версию на сайте www.easel.ly, в которой доступны нужные инструменты для создания инфографики. Работы в итоге получились наглядными и яркими. В них ребята показали, что платежные карты для потребителя это: удобство в использовании, льготы при приобретении товаров и получении услуг на предприятиях торговли и сервиса, уменьшение затрат на проведение финансовых операций, получение дохода от хранения денег на карточных счетах, удаленное управление счетом, а также разнообразие выбора видов и типов карт.

Какая банковская карта лучше?

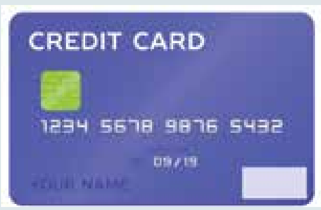
Виды карт

Дебетовая

Только для получения зарплаты, пенсии, стипендии и т.д. Подходит тем, кто боится кредитов и склонен к спонтанным тратам

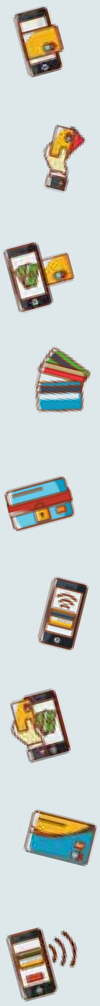
Кредитная

Можно расходовать как свои деньги, так и банковские в виде займа. Подходит тем, кому периодически нужно «перехватить до получки»



Дебетно-кредитная

Например, зарплатная карта с сертификатом. Подходит тем, кто имеет регулярный доход



Типы карт

Электронные карты Visa Electron и MasterCart Maestro (для снятия наличных в банкоматах и оплаты покупок в торговых точках)

Классические карты: МИР, Visa Classic, MasterCart Standart (для снятия наличных, покупок в магазинах и интернет-покупок)

Премиальные карты Gold и Premium — статусные карты (широкий набор функций и привилегий, повышенный кэшбек, включение в страховые программы и др.)

Виртуальные карты (только для расчетов в интернете)

Г. КОНЕВА,
г. Улан-Удэ

ИНСТРУМЕНТ CLOUDTEXT ДЛЯ ПРОВЕРКИ ПИСЬМЕННЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ОНЛАЙН

Дистанционное обучение — это сложный процесс, требующий от учителя новых знаний, новых умений и навыков. Поэтому в настоящее время учителя находятся в поиске новых методик и новых инструментов для работы с классом. Существует большой выбор инструментов и образовательных контентов, которые помогают учителю в вопросе организации дистанционного обучения. Одним из таких инструментов является инструмент для проверки письменных домашних заданий онлайн CloudText (cloudtext.ru).

С момента начала дистанционного обучения я использую этот сервис в своей работе. Пользоваться сервисом можно бесплатно, но при этом будут отсутствовать возможности записывать голосовые сообщения и смотреть подробную статистику по ученикам.

Чтобы начать работать в CloudText, необходимо зарегистрироваться и указать учебные предметы, по которым ученики будут выполнять задания. Затем пригласить учеников, отправив им ссылку-приглашение через Viber, WhatsApp или другие социальные сети. Когда учащиеся появятся на вашей странице, объедините их по группам или классам (рис. 1). Ограничений на количество учеников нет.

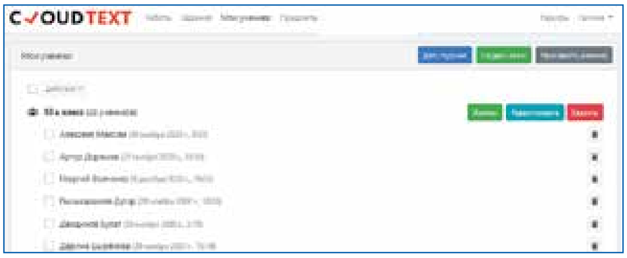


Рис. 1

Задания можно использовать из банка заданий сервиса или создавать самому в разделе *Дать задание*, выбрав категорию *Другое* (рис. 2).

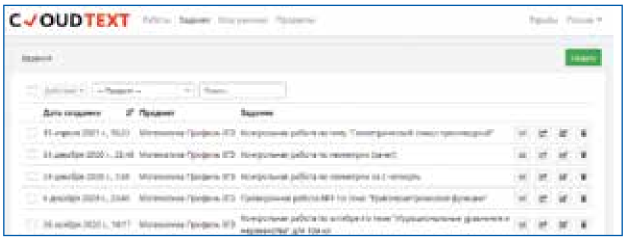


Рис. 2

Удобнее всего задания по математике загружать в виде фото или отсканированного документа (рис. 3). После получения и выполнения задания ученики заполняют поля для ответа или прикрепляют фото работы. Проверка осуществляется выделением ошибки с последующим комментарием (рис. 4). Комментарии остаются, и в любой момент ученик может просмотреть проверенные работы, чтобы избежать ошибок в дальнейшем. Каждое выполненное учеником задание остается в системе. Можно анализировать, как меняются результаты учеников в динамике или задав определенные критерии. Проверить можно любое количество работ, ограничения лишь в наборе функций.

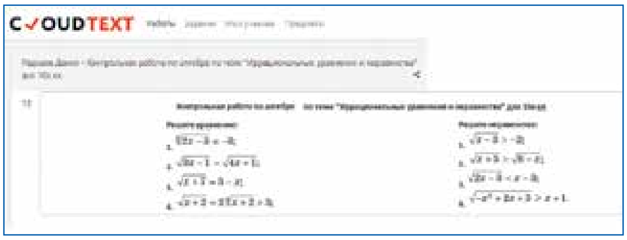


Рис. 3

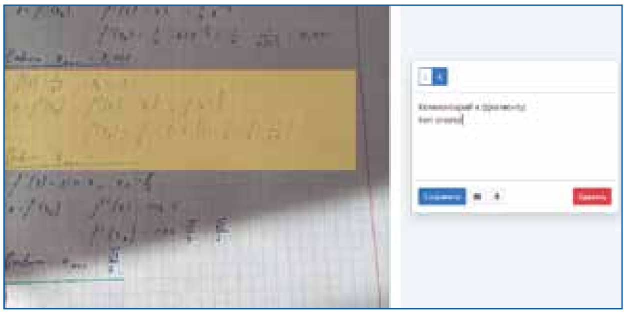


Рис. 4

Какими преимуществами обладает этот инструмент? Не нужно скачивать и устанавливать никаких программ, все происходит через браузер. Проверять работы можно как с компьютера, так и со смартфона. Есть возможность демонстрировать ошибки на уроке всему классу. Система сама подсчитывает количество ошибок.

Одно из условий эффективной удаленной работы — частая смена заданий и много практики. Детям сложно воспринимать и усваивать большой объем информации или длительное время выполнять одно задание. CloudText — это незаменимый помощник в работе учителя, и не только в условиях дистанционного обучения. Я продолжаю его использовать и при очном обучении.

СЕКЦИЯ 2

С. ЖАРКОВА,
г. Улан-Удэ

ВОЗМОЖНОСТИ ВИРТУАЛЬНОЙ ДОСКИ PADLET

Невозможно представить учителя без доски. С переходом на преподавание с применением элементов дистанционного обучения становится актуальным использование виртуальных досок. В интернете их большое разнообразие: Webwhiteboard, AMW board, MIRO (старое название Realtimeboard), Twiddla и др. Я сделала свой выбор в пользу доски Padlet и хочется поделиться информацией о возможностях, которые предоставляет учителю данная доска.

Сетевой сервис Padlet (-let — англ. уменьшительный суффикс, pad — блокнот, планшет) является одним из популярных онлайн-средств создания виртуальных досок. Виртуальная доска (онлайн-доска) — это сервис, который дает возможность учащимся разместить свою работу на доске, а преподавателю — прокомментировать и оценить каждого. Возможно также использование доски для размещения справочных, учебно-методических, контрольно-измерительных и других материалов. Таким образом, на доске можно разместить любой материал в электронном виде.

Сервис бесплатный, имеет русскоязычную версию, прост в освоении и не требует никакой начальной подготовки. Зайдя на сайт, можно начать пользоваться некоторыми функциями сервиса даже без регистрации.

После регистрации выбираем тему (рис. 1). Далее выбираем тип доски. В бесплатном доступе их пять (рис. 2). Я использовала тип Wall (стена). Для оформления доски можно воспользоваться готовыми шаблонами.

Каждый отдельный ресурс, размещенный на виртуальной стене, называется постом. Добавление постов происходит по двойному клику мыши в любом свободном месте стены. При этом появляется небольшое окно с двумя активными полями и кнопками загрузки материалов.

Доступ к созданной стене может быть организован несколькими способами: *приватный* — позволяет работать с материалами только автору виртуальной стены и тем, кого пригласили по e-mail; *защищенный* — доступ к контенту открыт тем, кто знает пароль для входа; *скрытая ссылка* — любой пользователь, имеющий ссылку для входа, может работать с материалами; *доступ абсолютно всем* — любой человек может получить доступ к контенту. Данные будут доступны поисковым сервисам и могут быть выведены в результатах поиска.

К преимуществам сервиса Padlet можно отнести: выбор дизайна виртуальной доски; организация коллективной деятельности в режиме реального времени и работы с визуальным контентом; возможность размещения материалов как с любого носителя, так и из сети интернет (фото-, видео-, аудиофайлы).

Доску можно использовать для совместной работы, для сбора материала в одном месте, поэтому она идеально подходит для групповой дистанционной работы. Учитель может сформировать группы, а затем на платформе ИнфоУрок или Zoom дать ссылку на Padlet, где заранее разместить задания для каждой группы. Учащиеся сами распределят обязанности (например, поиск информации, видео, фото и т.п. по теме). На доске есть возможность прикрепить всю эту информацию, а также установить ссылки и переходить по ним в дальнейшем. Такое обучение становится намного эффективнее, особенно если к текстовым документам прикре-

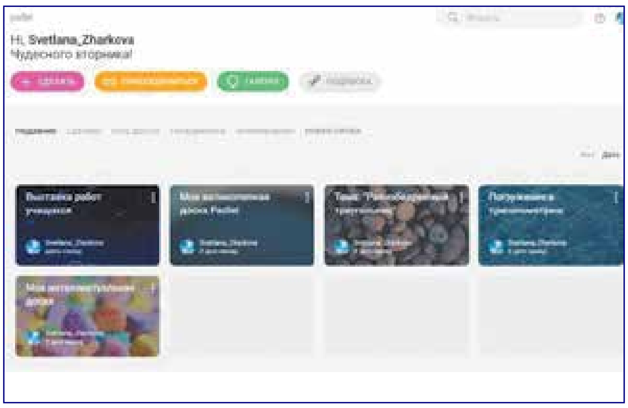


Рис. 1

Рис. 2

плены изображения, презентации, аудио и видеоматериалы.

В нашей школе недавно заочно прошла школьная практическая конференция по математике. Участники конференции были лишены, как раньше, возможности демонстрации своих работ и познакомиться с исследовательскими работами других участников. Виртуальная доска Padlet — это вариант выхода из данной ситуации. Публикация работ на доске была бы удобной как учащимся, так и членам экспертной комиссии.

Я создала виртуальную доску «Погружение в тригонометрию» (рис. 3).

Поскольку в данный момент я являюсь учителем математики в старших классах, то для меня эта тема доски актуальна. Она была создана в помощь учащимся — для успешного изучения курса тригонометрии, но может помочь и коллегам решить проблему обеспечения наглядности в преподавании этого сложного раздела математики.

При создании данного ресурса передо мной были поставлены следующие задачи: способствовать решению проблемы активизации деятельности обучающихся посредством включения их в эмоционально насыщенную познавательную деятельность по теме; дать возможность изучать материал по индивидуальным образовательным траекториям, с учетом личных склонностей и уровня интеллектуального развития; предоставить учащимся возможность проверить уровень своей предметной подготовки.

Результаты опроса респондентов показывают определенную значимость изучения тригонометрии. Разработанные тренажеры и тесты также апробированы и имеют успех. Доска предоставляет возможность проверки знаний, просмотра уроков, мониторинга работ учащихся, выбора тем исследовательских работ, реализации дистанционных форм обучения и др. А главное, она позволяет улучшить образовательный процесс и настроить его под индивидуальные особенности школьников.

Для реализации поставленных задач не случайно выбрана эта платформа, так как пространство доски бесконечно, а управление данным пространством элементарно. Ресурс может и будет пополняться. С удовольствием поделюсь накопленным арсеналом с коллегами, приглашаю их к сотрудничеству.

Итак, для чего же нужна доска Padlet?

– Для повторения изученного;
– для обучения;
– для планирования;
– для сбора информации;
– для хранения информации;
– для конспектирования;
– для рефлексии на уроке;
– для получения обратной связи и уточнения информации.

Она идеальна для проектной деятельности.

Использование виртуальной доски в учебном процессе расширяет возможности визуализации информации. Виртуальная доска выступает как средство внедрения интерактивных форм обучения в учебный процесс. Применение виртуальной доски позволяет значительно расширить набор дидактических средств. А эффективность использования виртуальной доски зависит прежде всего от овладения учителем методикой работы с ней как с инструментом.

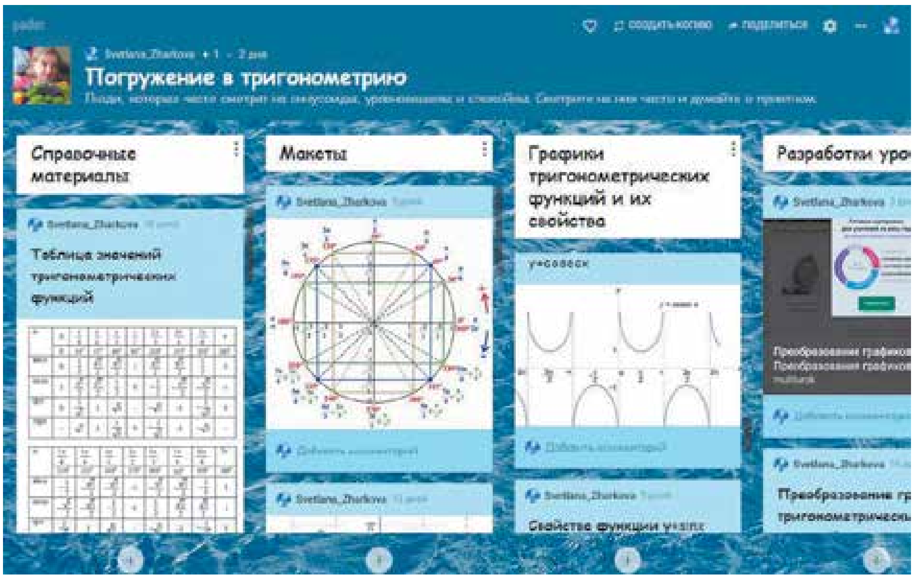


Рис. 3

Источники информации

1. Режим доступа: https://ru.padlet.com. 2. Режим доступа: https://www.eduneo.ru/6470-2. 3. Режим доступа: xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/ispolzovanie_virtualnoj_onlajndoski_padlet_kak_001920.html. 4. Режим доступа: https://evrophiz.wordpress.com/2017/09/25/онлайн-доска-padlet-для-учителя-что-и-как. 5. Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/o-didakticheskih-vozmozhnostyah-ispolzovaniya-virtualnoy-doski-padlet-v-obrazovatelnom-protsesse-vuza.

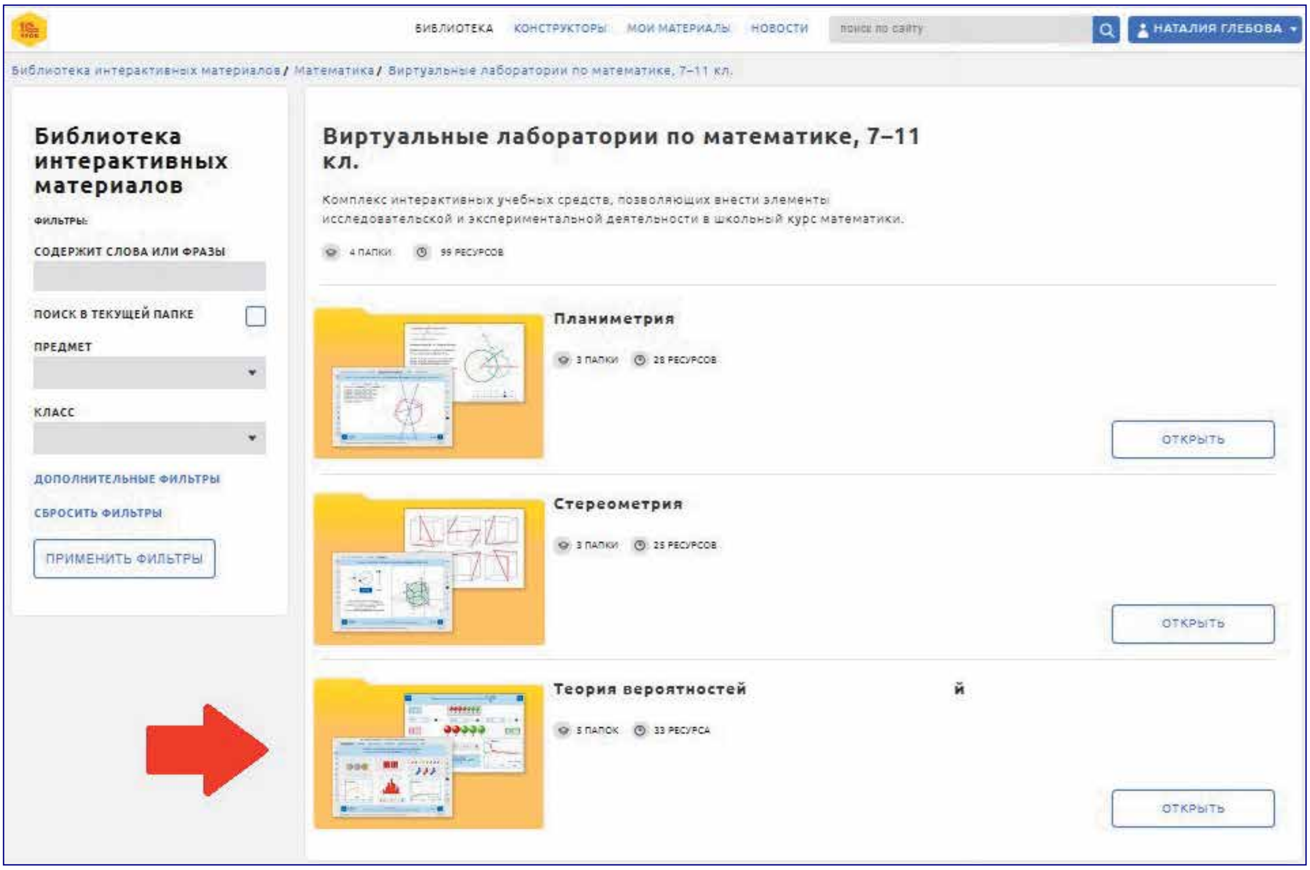


Рис. 1

СЕКЦИЯ 4

Н. ГЛЕБОВА,
с. Турунтаево,
Республика Бурятия

ВИРТУАЛЬНАЯ ЛАБОРАТОРИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Цифровая образовательная среда дает нам, участникам образовательного процесса, возможность применять в своей работе инновационные технологии, цифровые ресурсы, инструменты и программы. При грамотном их использовании в учебной деятельности учащихся расширяются границы исследований, появляются новые формы проведения занятий, а сама учебная деятельность становится более логичной и доказательной.

Одним из самых эффективных средств обучения учащихся математике с применением информационно-компьютерных технологий являются интерактивные динамические системы. Такая, например, программная среда, как «Виртуальная лаборатория», предназначена для создания интерактивных математических моделей, сочетающих в себе конструирование, моделирование, динамическое варьирование и виртуальный эксперимент (рис. 1).

Лаборатория разработана с учетом требований, предъявляемых российской школой и использует уникальный опыт лучших педагогов-математиков. Динамический наглядный механизм «Виртуальной лаборатории» предоставляет младшим школьникам возможность творческой манипуляции с объектами, а ученикам старшей школы — полнофункциональную среду для конструирования и решения задач.

Модели данной программной среды запускаются на настольных компьютерах и мобильных устройствах при помощи браузера. Их можно использовать для сопровождения занятий в любом разделе школьного курса математики. Но мы более подробно остановимся на виртуальной лаборатории под названием «Теория вероятностей» (рис. 2).

Данная лаборатория расположена на официальном сайте разработчика обучающих приложений 1С [1]. Авторами виртуальной лабо-

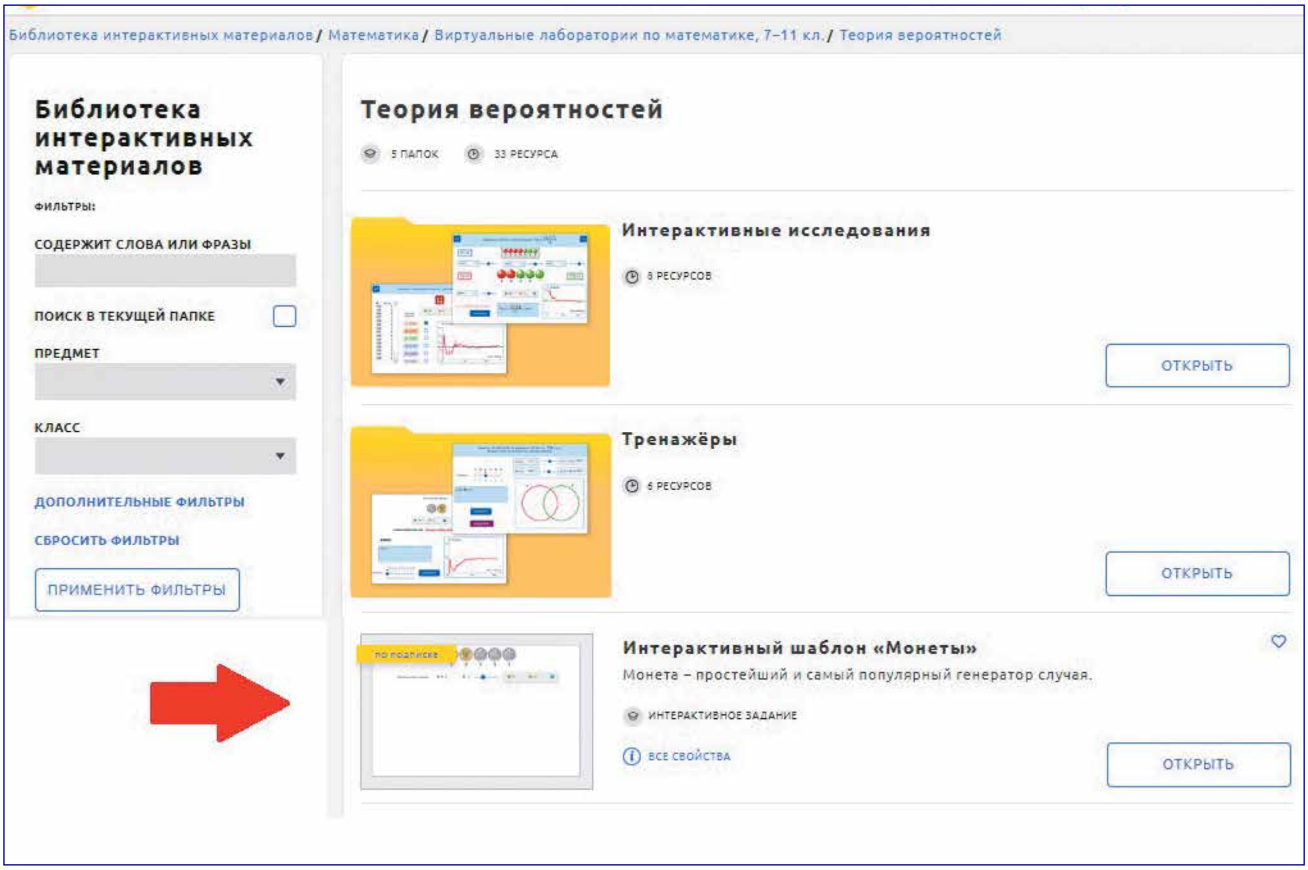


Рис. 2

рактории являются В.Н. Дубровский и В.А. Булычев, которые разработали методические рекомендации по применению инструментов лаборатории для начинающих пользователей [2], интерактивную презентацию «Как пользоваться лабораторией «Вероятность и статистика» [3], а также справочник инструментов данной лаборатории [4].

В ней представлены интерактивные шаблоны для проведения случайных событий и обработки полученных данных.

К основным возможностям шаблонов относятся:

– проведение случайных испытаний с дискретными вероятностными моделями — монетами, кубиками, шарами, кнопками и т.д.;

– проведение случайных испытаний с геометрическими моделями (случайные точки на отрезке или кривой, в прямоугольнике или круге и т.д.);

– вычисление случайных величин — функций от исходов испытаний, автоматический

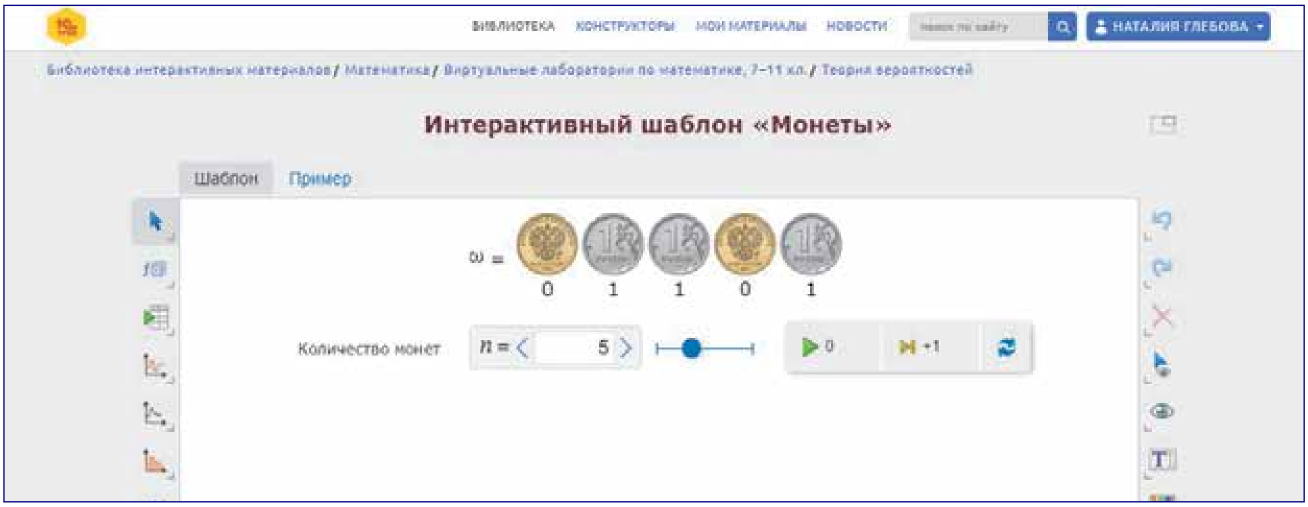


Рис. 3

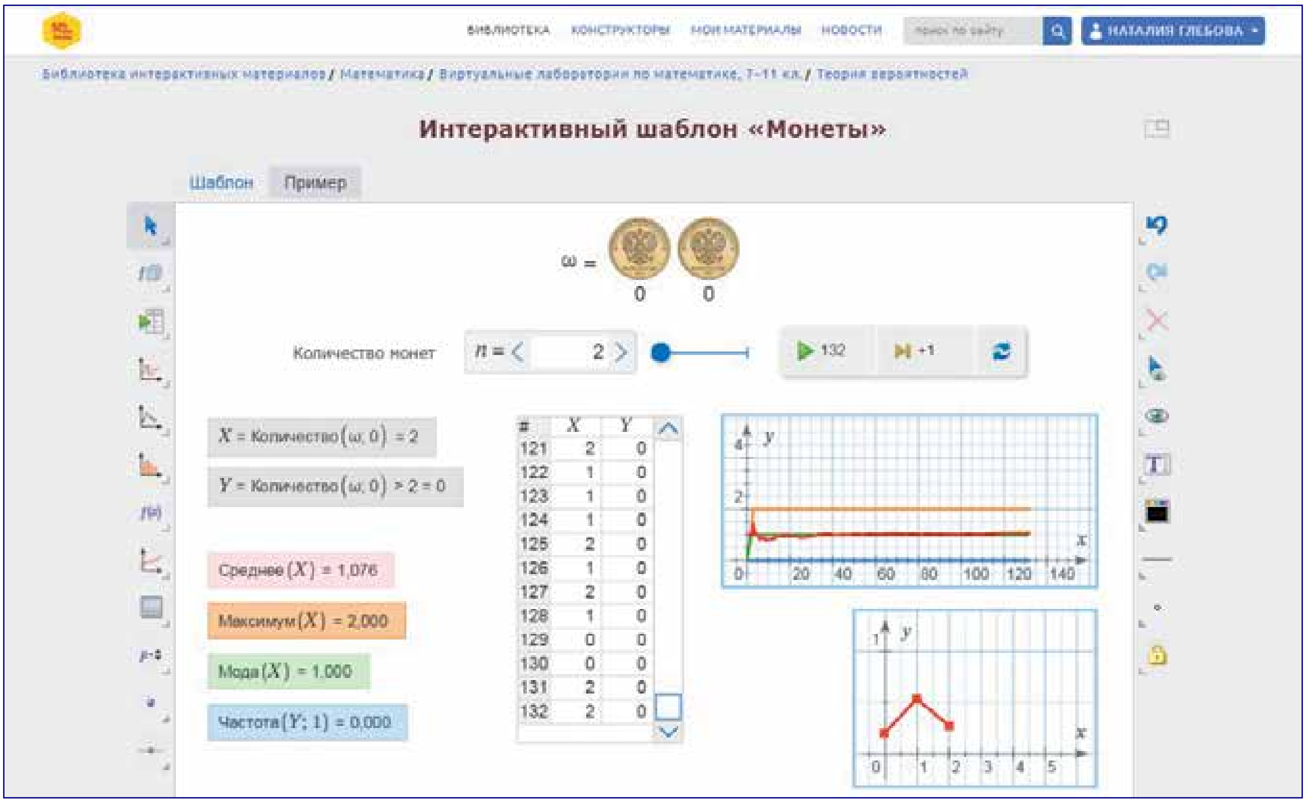

БИБЛИОТЕКА
КОНСТРУКТОРЫ
МОИ МАТЕРИАЛЫ
НОВОСТИ
НАТАЛИЯ ГЛЕБОВА
Интерактивный шаблон «Монеты»
Шаблон
Пример
ω =
0
0
Количество монет
n = 2
132
+1
X = Количество(ω; 0) = 2
Y = Количество(ω; 0) > 2 = 0
Среднее(X) = 1,076
Максимум(X) = 2,000
Мода(X) = 1,000
Частота(Y; 1) = 0,000
X Y
121 2 0
122 1 0
123 1 0
124 1 0
125 2 0
126 1 0
127 2 0
128 1 0
129 0 0
130 0 0
131 2 0
132 2 0

Рис. 4

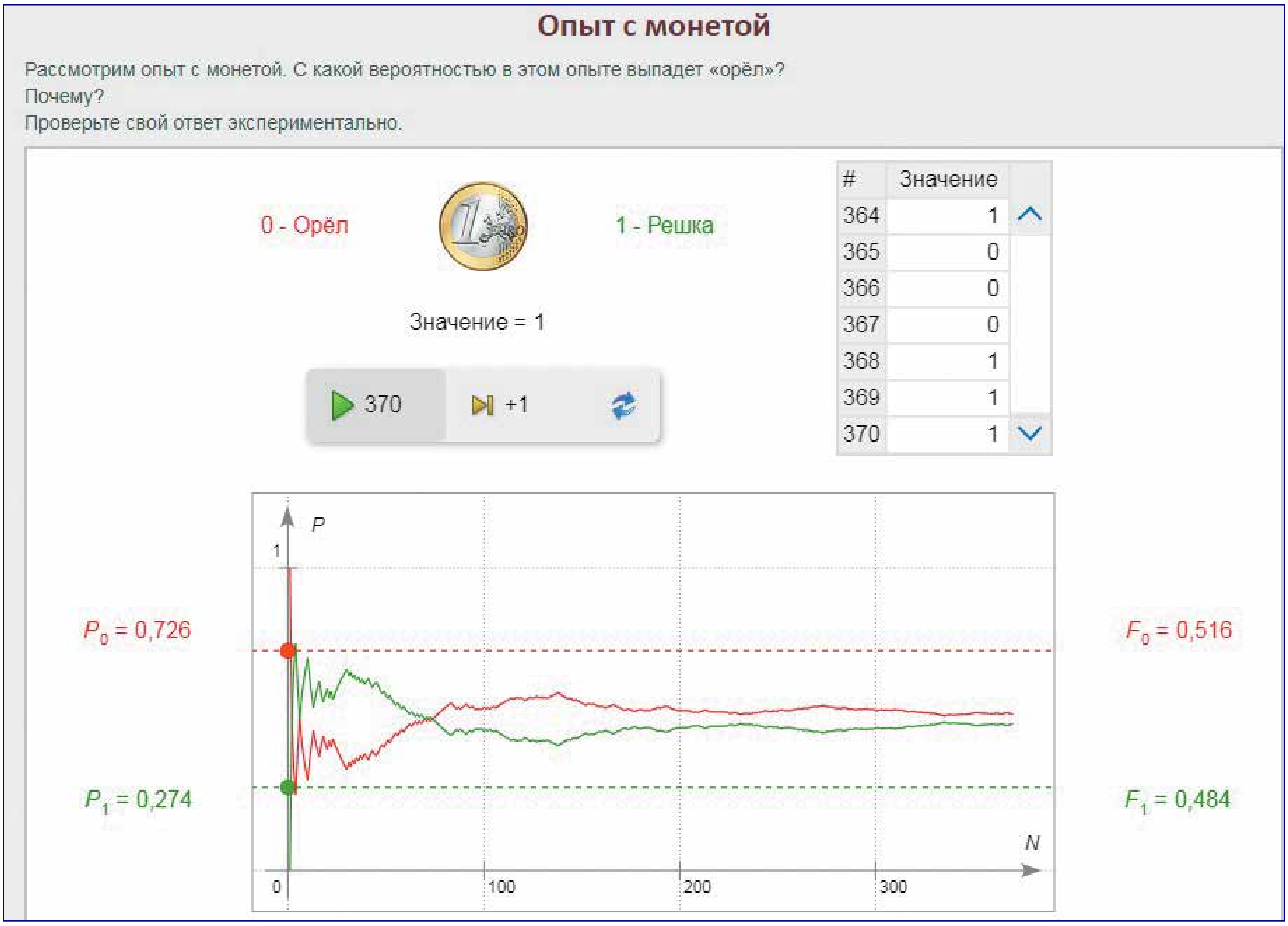

Опыт с монетой
Рассмотрим опыт с монетой. С какой вероятностью в этом опыте выпадет «орёл»?
Почему?
Проверьте свой ответ экспериментально.
0 - Орёл
1 - Решка
Значение = 1
370
+1
Значение
364 1
365 0
366 0
367 0
368 1
369 1
370 1
P
1
P_0 = 0,726
P_1 = 0,274
F_0 = 0,516
F_1 = 0,484
N
0
100
200
300

Рис. 5

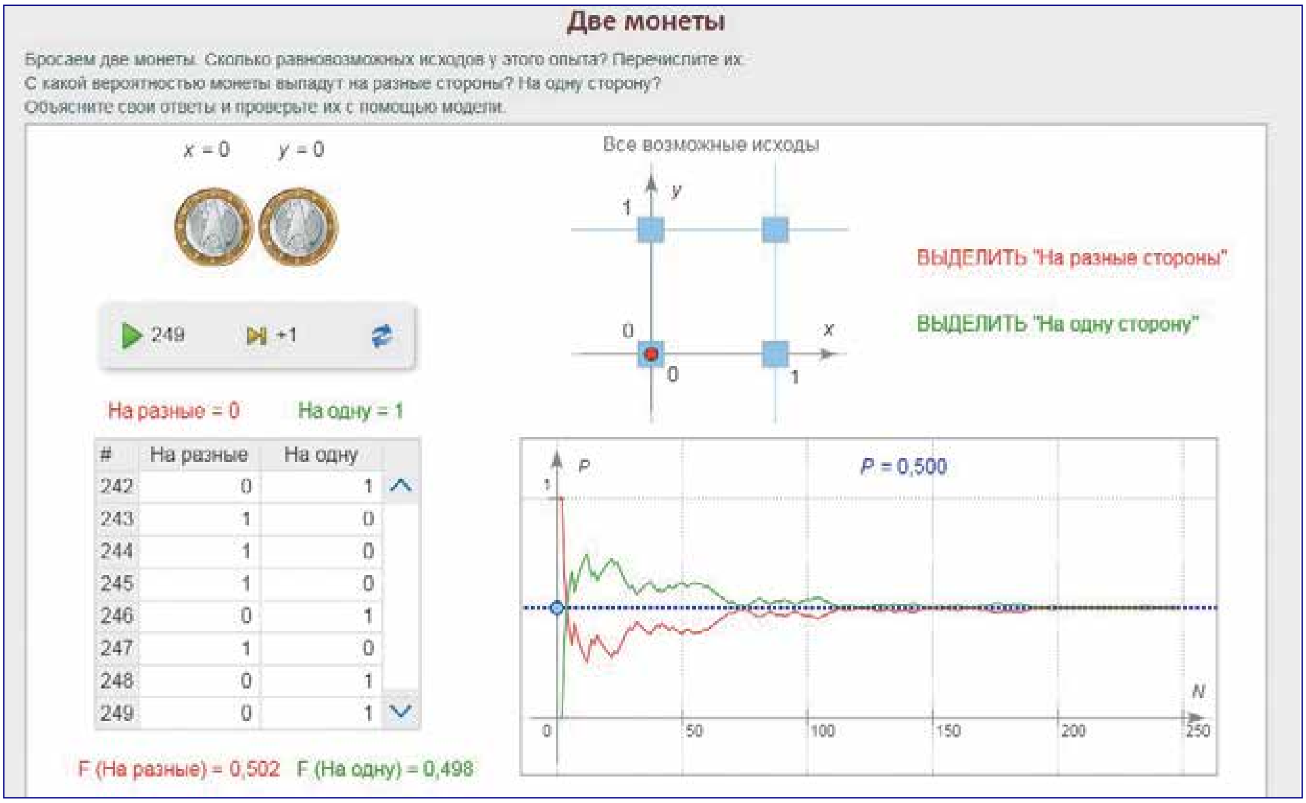

Две монеты
Бросаем две монеты. Сколько равновозможных исходов у этого опыта? Перечислите их.
С какой вероятностью монеты выпадут на разные стороны? На одну сторону?
Объясните свои ответы и проверьте их с помощью модели.
x = 0 y = 0
249
+1
На разные = 0
На одну = 1
На разные На одну
242 0 1
243 1 0
244 1 0
245 1 0
246 0 1
247 1 0
248 0 1
249 0 1
F (На разные) = 0,502 F (На одну) = 0,498
Все возможные исходы
ВЫДЕЛИТЬ "На разные стороны"
ВЫДЕЛИТЬ "На одну сторону"
P = 0,500
N
0 50 100 150 200 250

Рис. 6

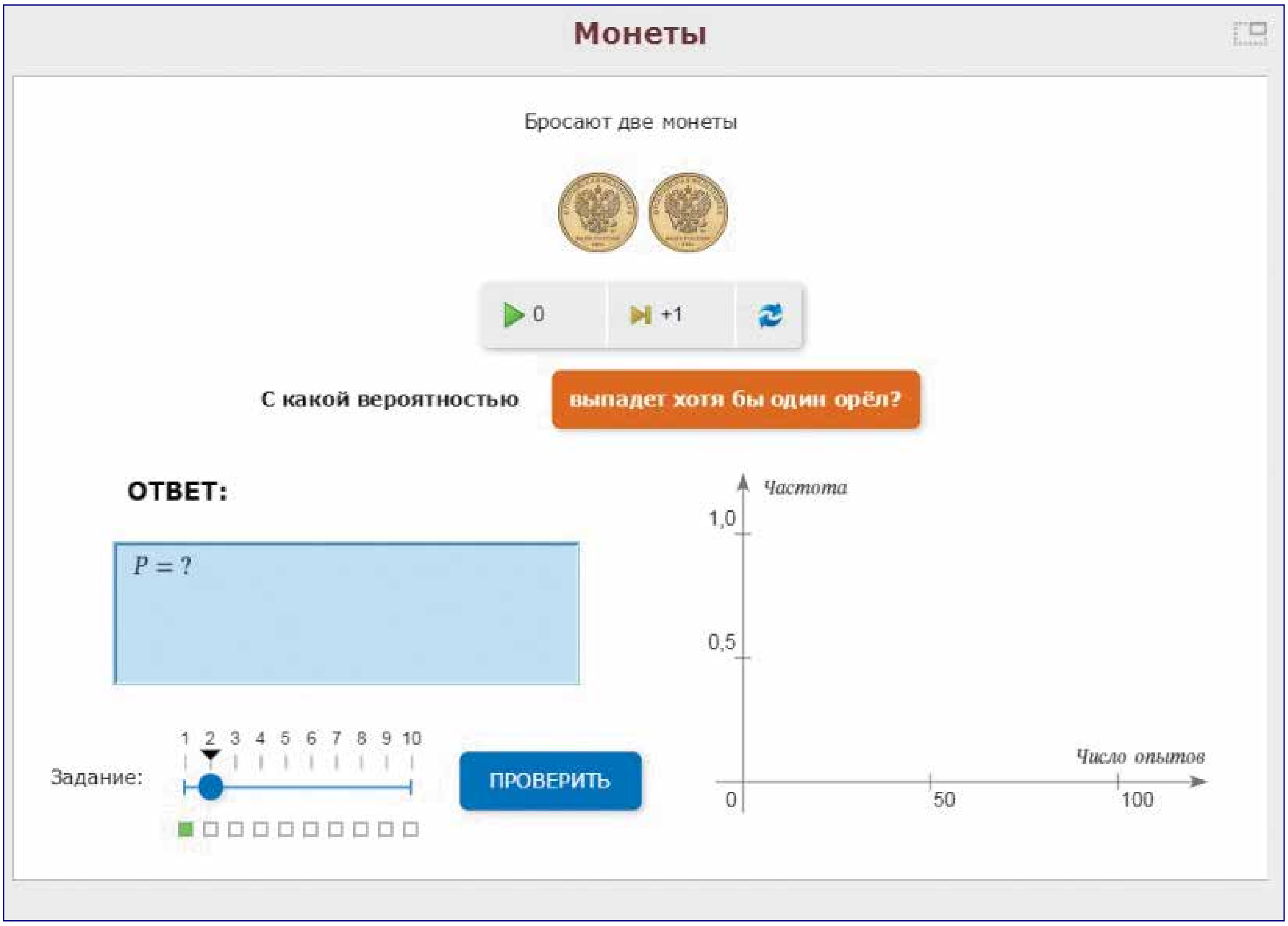

Монеты
Бросают две монеты
0
+1
С какой вероятностью
выпадет хотя бы один орёл?
ОТВЕТ:
P = ?
Задание:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
ПРОВЕРИТЬ
Частота
1,0
0,5
Число опытов
0 50 100

Рис. 7

сбор полученных данных в табличном виде, статистический анализ полученных данных.

Простейшим и самым популярным генератором случайных событий является шаблон «Монеты», представляющий собой рабочую зону с плеером случайных испытаний и большим набором инструментов на боковых панелях (рис. 3).

В рабочей зоне шаблона предустановленно случайное испытание с n монетами, параметр n меняется в диапазоне от 1 до 12. С помощью плеера случайных испытаний можно запустить или остановить серию экспериментов или провести одиночное испытание по подбрасыванию монеты (рис. 4). Исходом каждого испытания является последовательность из n орлов и решек, которые для удобства дальнейших вычислений кодируются символами 0 и 1 и вносятся в таблицу значений.

Используя данный шаблон, можно изучать закономерности случайных величин (среднее значение, максимум, минимум, количество повторений, моду, частоты и т.д.). Учащиеся также имеют возможность наглядно отследить особенности такого эксперимента с помощью красочных диаграмм.

Итак, виртуальная лаборатория «Теория вероятностей» позволяет школьникам быстрее и эффективнее провести эксперименты, повышает запоминаемость материала. Она увеличивает степень эмоциональной вовлеченности учащихся в образовательный процесс, обеспечивает возможность постановки творческих задач и организации проектной деятельности. Средства лабораторий могут использоваться как учителем при объяснении и закреплении материала, так и учениками в самостоятельной работе в классе и дома.

Далее приводятся примеры использования данной платформы на уроках алгебры в 9-м классе.

Пример 1. На вводном уроке классическое определение вероятности можно сформулировать с помощью эксперимента с подбрасыванием монеты. Так как монета является примером симметричного предмета, то мы имеем дело с равновозможными исходами. С помощью шаблона «Монета» мы проверяем (рис. 5), с какой вероятностью в этом опыте выпадет, например, орел [5].

Пример 2. Рассмотрим задачу с перебором равновозможных исходов при подбрасывании двух монет. Обычно учащиеся называют три исхода: ОО, РР и ОР (или РО), забывая об исходе РО (или ОР). Далее усложним задачу новыми вопросами: с какой вероятностью монеты упадут на одну сторону; на разные стороны? После ответов учащихся мы проводим опыт с подбрасыванием двух монет с помощью интерактивной платформы (рис. 6), которая наглядно и красочно демонстрирует исходы данного эксперимента [6].

Пример 3. В разделе «Тренажеры «Монеты» [7] находится десять замечательных задач исследовательского характера, которые можно использовать для закрепления полученных знаний и умений учащихся. На рабочем столе тренажера представлены вопросы, на которые ученик сможет ответить после проведения соответствующего опыта (рис. 7). При этом вопросы повторяются для различного количества подбрасываемых монет (например, с какой вероятностью выпадет один орел; хотя бы один орел; не выпадет ни одного орла). Тренажер самостоятельно оценивает ученика и дает возможность исправить ошибочные ответы.

Источники информации

1. Официальный сайт разработчика обучающих приложений 1С. — Режим доступа: https://obr.1c.ru/mathkit/index.html.
2. Методические рекомендации по применению инструментов лаборатории. — Режим доступа: https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/teoriya_veroyatnostey/pomoshch_polzovatelyu/4440.phd.
3. Интерактивная презентация «Как пользоваться лабораторией «Вероятность и статистика». — Режим доступа: https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/teoriya_veroyatnostey/4434.phd.
4. Справочник инструментов лаборатории «Теория вероятностей». — Режим доступа: https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/teoriya_veroyatnostey/pomoshch_polzovatelyu/4513.phd.
5. Опыт «Монета». — Режим доступа: https://obr.1c.ru/mathkit/lessons/4_2.html.
6. Опыт «Две монеты». — Режим доступа: https://obr.1c.ru/mathkit/lessons/4_4.html.
7. Тренажер «Монеты». — Режим доступа: https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/teoriya_veroyatnostey/trenazhyery/4481.phd.

Э. КРАСС,
г. Москва

Фото предоставлены автором

ВОКРУГ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Семиклассник Тимофей сидел и тоскливо смотрел на раскрытую тетрадь с текстом домашней задачи, которую он списал с классной доски.

Задача. Одна сторона тупоугольного треугольника на 6 см больше другой стороны. Найти длины сторон этого треугольника, если его периметр равен 43 см.

Неизвестно, сколько времени он так просидел бы, но мама решила помочь сыну с помощью интернета. Набрав в поисковике текст задачи и просьбу показать ее решение, она увидела похожие задачи, но в условии каждой из них было сказано, что искомый треугольник равнобедренный. Время шло, а решения задачи не было.

Тогда мама обратилась за помощью к дедушке, который до выхода на пенсию работал учителем математики. Выслушав возмущения о наличии вариантов условия задачи, дедушка предложил позвонить учительнице и выяснить, какой текст задачи является правильным.

– Это невозможно, — сказала мама. — Светлана Васильевна сказала: «Никаких телефонных звонков. Я все даю на уроке!»

– Странно, — сказал дедушка, — тогда придется решить обе задачи: и про равнобедренный треугольник, и про неравнобедренный треугольник. Начнем с равнобедренного.

Задача. Одна сторона равнобедренного тупоугольного треугольника на 6 см больше другой стороны. Найти длины сторон этого треугольника, если его периметр равен 43 см.

– Такую задачу я смогу решить, — обрадовался Тимофей. — Обозначим через x длину меньшей стороны треугольника. Тогда длина большей стороны будет $x + 6$. Поэтому составим уравнение $x + x + x + 6 = 43$ и решим его. Готово! Длины сторон этого треугольника равны $12\frac{1}{3}$ см, $12\frac{1}{3}$ см и $18\frac{1}{3}$ см.

– Погоди, — произнес дедушка. — В условии задачи не сказано, что большая сторона единственная.

– Понял. Тогда получаем другое уравнение: $x + x + 6 + x + 6 = 43$, где x — длина меньшей стороны треугольника. Отсюда находим, что длины сторон этого треугольника равны $10\frac{1}{3}$ см, $16\frac{1}{3}$ см и $16\frac{1}{3}$ см. Все, — выдохнул Тимофей.

– Как все? Так сколько решений имеет эта задача?

Дедушка перевел взгляд от тетради с решением на Тимофея. Тимофей смущенно молчал.

– Решение уравнений показало длины сторон треугольника, но в условии задачи говорится о тупоугольном треугольнике. Поэтому тебе надо связать длины сторон с величинами углов этого треугольника, — сказал дедушка.

– А, — вспомнил Тимофей, — против большей стороны лежит больший угол, а против меньшей — меньший.

– Так, — сказал дедушка, — а теперь делай вывод.

– У треугольника со сторонами $10\frac{1}{3}$ см, $16\frac{1}{3}$ см и $16\frac{1}{3}$ см две большие стороны. Поэтому противолежащие им углы не могут быть тупыми. Значит, правильный ответ: стороны треугольника $12\frac{1}{3}$ см, $12\frac{1}{3}$ см и $18\frac{1}{3}$ см, — сделал вывод Тимофей.

– А ты уверен, что угол, противолежащий стороне $18\frac{1}{3}$ см, тупой? — спросил дедушка.

– Нет.

– Я тоже не знаю, как известными тебе способами установить, является ли этот треугольник тупоугольным, — сказал дедушка, а про себя подумал: «Можно было бы применить теорему косинусов, но они этого еще не изучали; тогда можно построить треугольник по трем известным сторонам и измерить транспортиром больший угол».

– Ладно, пусть твоя учительница расскажет, какое условие задачи правильное и нужно ли устанавливать, что полученный треугольник тупоугольный. А теперь давай решим вариант этой задачи для случая, когда треугольник неравнобедренный.

– Я не знаю, как ее решить. Мы такие задачи не решали, — сказал Тимофей.

– Хорошо. Давай решать вместе. Обозначим через x длину меньшей стороны треугольника, тогда длина второй стороны равна $x + 6$, а длина третьей стороны равна $43 - x - (x + 6) = 37 - 2x$. Допустим, что длины сторон треугольника — натуральные числа, и будем находить длины сторон этого треугольника подстановкой, придавая переменной x значения от 1 до 18. Тебе понятно, почему до 18?

– Да. Потому что $37 - 2 \cdot 18 = 1$, а $37 - 2 \cdot 19 = -1$.

– Молодец! А теперь вычисли все 18 троек длин отрезков и выясни, какие из них могут образовать треугольник.

Из 18 вариантов Тимофей указал следующие восемь троек:

x	$x + 6$	$37 - 2x$	p
8	14	21	43
9	15	19	43
10	16	17	43
11	17	15	43
12	18	13	43
13	19	11	43
14	20	9	43
15	21	7	43

– К сожалению, и в этом случае ты не можешь указать, какие именно тройки отрезков могут образовать тупоугольный треугольник. Послушай, что скажет учительница при разборе домашнего задания, а потом мне расскажи.

Когда Тимофей ушел выполнять остальное домашнее задание, дедушка решил установить, какая из восьми троек отрезков образует тупоугольный треугольник. Для этого он применил простое следствие теоремы косинусов:

Если сумма квадратов длин меньших сторон треугольника…

– больше квадрата длины его большей стороны, то треугольник остроугольный;

– равна квадрату длины его большей стороны, то треугольник прямоугольный;

– меньше квадрата длины его большей стороны, то треугольник тупоугольный.

Подсчеты показали, что все восемь троек отрезков образуют тупоугольный треугольник. И треугольник со сторонами $12\frac{1}{3}$ см, $12\frac{1}{3}$ см и $18\frac{1}{3}$ см также тупоугольный.

Выяснив, что ответы к обеим задачам удовлетворяют их условиям, дедушка решил «покопаться» в этих задачах.

Во-первых, почему в условии задачи написано о тупоугольном треугольнике? Либо автор задачи знает, что эти отрезки образуют тупоугольный треугольник, либо ученик должен доказать, что найденные им отрезки образуют тупоугольный треугольник. Но семиклассник не знает, как это сделать.

Во-вторых, что за странная величина периметра треугольника: 43 см? Для того, чтобы семиклассники повторили обыкновенные дроби? Как влияет величина периметра при данных условиях на вид треугольника: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный?

Дедушка взял ближнюю к числу 43 величину периметра и получил интересный результат. Так что число 43 было выбрано, скорее всего, неслучайно.

В-третьих, как влияет величина первой стороны треугольника и величина разности между длинами первой и второй сторон треугольника на количество возможных треугольников.

У дедушки был свободный вечер, и он посвятил его исследованию домашнего задания. Результат получился в виде следующих задач. Во всех задачах длины сторон треугольников — натуральные числа.

Задача 1(а). Одна сторона равнобедренного остроугольного треугольника на 6 см больше другой стороны. Периметр равен 42 см.

7-й класс. а) Найти длины сторон треугольника.

б) С помощью циркуля и линейки построить треугольник.

в) С помощью транспортира измерить величины углов треугольника.

9-й класс. а) Найти длины сторон треугольника.

б) Вычислить величину меньшего угла.

в) Вычислить площадь треугольника.

Ответ: ***7-й класс***: а) 10 см, 16 см и 16 см; в) $\approx 72°$, $\approx 72°$, $\approx 36°$. ***9-й класс***: а) 10 см, 16 см и 16 см; б) $36{,}4°$; в) $75{,}99$ см^2.

Задача 1(б). Одна сторона равнобедренного тупоугольного треугольника на 6 см больше другой стороны. Периметр равен 42 см.

7-й класс. а) Найти длины сторон треугольника.

б) С помощью циркуля и линейки построить треугольник.

в) С помощью транспортира измерить величины углов треугольника.

9-й класс. а) Найти длины сторон треугольника.

б) Вычислить величину большего угла.

в) Вычислить площадь треугольника.

Ответ: ***7-й класс***: а) 12 см, 12 см и 18 см; в) ≈41,5°, ≈41,5°, ≈97°. ***9-й класс***: а) 12 см, 12 см и 18 см; б) 97,2°; в) 71,43 см^2.

Задача 1(в). Одна сторона треугольника на 6 см больше другой стороны. Периметр равен 42 см.

7-й класс. а) Указать, сколько таких треугольников существует.

б) Найти длины сторон каждого треугольника.

в) Сколько из этих треугольников равнобедренные?

9-й класс. а) Установить вид каждого треугольника.

Ответ: ***7-й класс***: а) 7; б) (8; 14; 20); (9; 15; 18); (10; 16; 16); (11; 17; 14); (12; 18; 12); (13; 19; 10); в) два. ***9-й класс***: а) тупоугольные треугольники со сторонами (8; 14; 20); (9; 15; 18); (12; 12; 18) и (10; 13; 19); остроугольные треугольники со сторонами (10; 16; 16) и (11; 14; 17).

Задача 2(а). Одна сторона равнобедренного треугольника на 6 см и в четыре раза больше другой стороны.

7-й класс. а) Указать, сколько таких треугольников существует.

б) Найти длины сторон треугольника.

в) С помощью циркуля и линейки построить треугольник.

г) Установить вид каждого треугольника.

9-й класс. а) Установить вид треугольника.

б) Вычислить величину большего угла.

в) Вычислить площадь треугольника.

Ответ: ***7-й класс***: а) один; б) 2 см, 8 см, 8 см; г) остроугольный. ***9-й класс***: а) остроугольный; б) 82,8°; в) 7,94 см^2.

Задача 2(б). Одна сторона треугольника на 6 см и в четыре раза больше другой стороны.

7-й класс. а) Указать, сколько таких треугольников существует.

б) Найти длины сторон каждого треугольника.

9-й класс. а) Установить вид каждого треугольника.

б) Вычислить площадь треугольника, имеющего меньший периметр.

в) Вычислить площадь треугольника, имеющего больший периметр.

Ответ: ***7-й класс***: а) три; б) (2; 8; 7); (2; 8; 8); (2; 8; 9). ***9-й класс***: а) остроугольный, остроугольный и равнобедренный, тупоугольный; б) 6,44 см^2; в) 7,31 см^2.

Задача 3. Одна сторона треугольника равна 1 см, а другая на 6 см больше.

7-й класс. а) Указать, сколько таких треугольников существует.

б) Найти длины сторон треугольника.

в) С помощью циркуля и линейки построить треугольник.

г) С помощью транспортира измерить величины углов треугольника.

д) Установить вид каждого треугольника.

9-й класс. а) Указать, сколько таких треугольников существует.

б) Найти длины сторон треугольника.

в) Установить вид треугольника.

г) Вычислить величину меньшего угла.

д) Вычислить площадь треугольника.

Ответ: ***7-й класс***: а) один; б) 1; 7; 7; г) ≈86°, ≈86°, ≈8°; д) равнобедренный, остроугольный. ***9-й класс***: а) один; б) 1; 7; 7; в) равнобедренный, остроугольный; г) 8,2°; д) 3,49 см^2.

Задача 4. В треугольнике со сторонами a, b и c сторона b больше стороны a на 1 см. Если длина стороны a равна 3 см…

7-й класс. а) Указать, сколько таких треугольников существует.

б) Найти длины сторон каждого треугольника.

9-й класс. а) Указать, сколько таких треугольников существует.

б) Найти длины сторон каждого треугольника.

в) Указать, какие отрезки образуют остроугольный треугольник.

г) Указать, какие отрезки образуют прямоугольный треугольник.

д) Указать, какие отрезки образуют тупоугольный треугольник.

Ответ: ***7-й класс***: а) пять; б) (3; 4; 2); (3; 4; 3);(3; 4; 4); (3; 4; 5); (3; 4; 6). ***9-й класс***: а) пять; б) (3; 4; 2); (3; 4; 3); (3; 4; 4); (3; 4; 5); (3; 4; 6); г) прямоугольный: (3; 4; 5); д) тупоугольные: (3; 4; 2) и (3; 4; 6).

Задача 5. В треугольнике со сторонами a, b и c сторона b больше стороны a на k см. Если длина стороны a равна n см…

7-й класс. а) Вычислить минимальную длину стороны c.

б) Вычислить максимальную длину стороны c.

в) Вычислить количество треугольников со сторонами a, b и c.

Ответ: ***7-й класс***: а) $k + 1$; б) $2n + k - 1$; в) $2n - 1$.

На следующий день дедушка спросил Тимофея о проверке домашнего задания.

– А Светлана Васильевна домашнее задание не проверяла, — был ответ.

«А жаль», — подумал дедушка.

С. СЕФИБЕКОВ,
с. Кашкент,
Республика Дагестан

ОБЩИЙ ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО

Определение. Признаком делимости называется правило, по которому, не выполняя деления, можно установить, делится ли одно число на другое.

С некоторыми признаками делимости учащиеся знакомятся в курсе математики 6-го класса. Общий признак делимости — признак делимости на натуральное число — связан с именем знаменитого французского математика, физика и философа Блеза Паскаля (1623–1662).

Приведу вывод «признака Паскаля» и рассмотрю некоторые его следствия. Данный материал учитель может использовать на кружковых и элективных занятиях с учащимися 8–9-х классов.

Натуральные числа можно записать в виде суммы их разрядных единиц. Например, число 756:

$$756 = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2;$$

число 2354:

$$2354 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3$$

и т.д. Если мы имеем некоторое $(n + 1)$-значное число A, то его можно записать в виде

$$A = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его разрядные единицы, $A = \overline{a_0 a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Установим делимость натурального числа A на натуральное число $b \neq 1$. Пусть g_0 и r_0, g_1 и r_1, g_2 и r_2, ..., g_n и r_n — соответственно частные и остатки деления чисел $1 = 10^0, 10, 10^2, \ldots, 10^n$ на число b ($0 \leq r_i < b$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Тогда

$$1 = bg_0 + r_0,\ 10 = bg_1 + r_1,\ 10^2 = bg_2 + r_2,\ \ldots,\ 10^n = bg_n + r_n.$$

Подставим данные выражения в равенство (1):

$$A = a_0(bg_0 + r_0) + a_1(bg_1 + r_1) + a_2(bg_2 + r_2) + \ldots + a_n(bg_n + r_n).$$

Учитывая, что $g_0 = 0$, имеем:

$$A = b(a_1g_1 + a_2g_2 + \ldots + a_ng_n) + (a_0r_0 + a_1r_1 + \ldots + a_nr_n). \qquad (2)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (2) делится на b. Поэтому если A делится на b, то и второе слагаемое делится на b. И наоборот, если второе слагаемое делится на b, то и A делится на b. Это и есть *«признак Паскаля»*:

Если число A делится на число $b \neq 1$, то сумма

$$a_0r_0 + a_1r_1 + \ldots + a_nr_n \qquad (*)$$

делится на b и наоборот, если сумма (*) делится на b, то и A делится на b.

Примечание 1. Признак Паскаля сводится к вычислению суммы (*). Главным его недостатком является вычисление остатков r_0, r_1, r_2, ... непосредственным делением степеней числа 10 на число b. От этих остатков и зависит вычислительная работа в приведенной выше сумме. Если эта работа большая, то признаком Паскаля пользоваться не следует, а делимость чисел лучше проверить непосредственным делением.

Частные случаи признака Паскаля как его следствия

1. Пусть $b = 2$, тогда $r_0 = 1$, $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ и потому

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = a_0.$$

Мы получили *признак делимости числа A на 2*:

Число делится на 2, если оно четно, то есть когда его последняя цифра делится на 2.

2. Пусть $b = 3$ (или $b = 9$). Тогда

$$r_0 = r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$$

и

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 =$$
$$= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

— это сумма цифр числа A. Она и определяет *признак делимости числа A на 3 (или на 9)*:

Если сумма цифр числа делится на 3 (или на 9), то и само число делится на 3 (или на 9).

3. Пусть $b = 7$. Тогда

$$r_0 = 1,\ r_1 = 3,\ r_2 = 2,\ r_3 = 6,\ r_4 = 4,\ r_5 = 5,\ r_6 = 1,$$
$$r_7 = 3,\ r_8 = 2,\ r_9 = 6,\ r_{10} = 4,\ r_{11} = 5,\ \ldots.$$

Мы видим, что идет повторение остатков: 1, 3, 2, 6, 4, 5; 1, 3, 2, 6, 4, 5; ....

Для делимости на 7 у остатков 6, 4, 5 не хватает соответственно 1, 3, 2. Эти недостающие единицы запишем со знаком «–»: –1, –3, –2. Тогда остатки выглядят следующим образом:

$$r_0 = 1,\ r_1 = 3,\ r_2 = 2,$$
$$r_3 = -1,\ r_4 = -3,$$
$$r_5 = -2,\ r_6 = 1,$$
$$r_7 = 3,\ r_8 = 2,$$
$$r_9 = -1,\ r_{10} = -3,$$
$$r_{11} = -2,\ \ldots.$$

Здесь имеем:

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 2 - a_3 \cdot 1 - a_4 \cdot 3 - a_5 \cdot 2,\ \ldots$$

(далее остатки 1, 3, 2, –1, –3, –2 повторяются). Запишем последнюю сумму в виде

$$(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 2) -$$
$$- (a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 3 + a_5 \cdot 2) + \ldots. \qquad (3)$$

Соотношение (3) определяет *признак делимости числа A на число 7*.

Составим *алгоритм к сумме (3)*.

1. Разбиваем число справа налево на грани по 6 цифр (в гранях могут оказаться и меньше шести цифр).

2. Занумеруем в каждой грани цифры справа налево так: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

3. Вычислим сумму (3). Если значение этой суммы делится на 7, то и число делится на 7. В противном случае — число не делится на 7.

Пример 1. Установите делимость чисел на 7:
а) 2359; б) 46 382; в) 321 783;
г) 31 468 164; д) 20 321 356 384 013 293.

Решение.

а) $$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 5 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

$$(9 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (2 \cdot 1) = 30 - 2 = 28,$$

делится на 7, тогда 2359 делится на 7.

б) $$\begin{array}{ccccc} 4 & 6 & 3 & 8 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

$$(2 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (6 \cdot 1 + 4 \cdot 3) = 32 - 18 = 14,$$

делится на 7, тогда 46 382 делится на 7.

в) $$\begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 1 & 7 & 8 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

$$(3 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2) - (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) =$$
$$= 41 - 13 = 28,$$

делится на 7, тогда 321 783 делится на 7.

г) $$\begin{array}{cc|cccccc} 3 & 1 & 4 & 6 & 8 & 1 & 6 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

$$(4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 2) - (8 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2) +$$
$$+ (1 \cdot 1 + 3 \cdot 3) =$$
$$= 24 - 34 + 10 = 0,$$

делится на 7, тогда 31 468 164 делится на 7.

д) $$\begin{array}{ccccc|cccccc|cccccc} 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 3 & 8 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 & 9 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

$$(3 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 2 \cdot 2) - (3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2) +$$
$$+ (4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2) +$$
$$+ (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (0 \cdot 1 + 2 \cdot 3) =$$
$$= 34 - 6 + 34 - 27 + 13 - 6 = 42,$$

делится на 7, тогда 20 321 356 384 013 293 делится на 7.

4. Пусть $b = 11$. Тогда

$$r_0 = 1,\ r_1 = 10,\ r_2 = 1,\ r_3 = 10,\ r_4 = 1,\ r_5 = 10,\ \ldots.$$

Для делимости числа A на 11 у остатков r_1, r_3, r_5, ... не хватает 1. Эту недостающую 1 запишем со знаком «–», то есть –1. Тогда остатки примут вид:

$$r_0 = 1,\ r_1 = -1,\ r_2 = 1,\ r_3 = -1,\ r_4 = 1,\ r_5 = -1,\ \ldots.$$

Имеем:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$$

или

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) \qquad (4)$$

Соотношение (4) определяет *признак делимости числа A на 11*, а именно:

Если разность между суммами цифр числа, стоящих на четных и нечетных местах, делится на 11, то и число A делится на 11.

Примечание 2. Расположение цифр в сумме (4) можно определить слева направо и наоборот, справа налево. Это не влияет на установленный алгоритм.

Пример 2. Число 543 675 319 делится на 11, так как

$$(5+3+7+3+9)-(4+6+5+1)=$$
$$=27-16=11,$$

делится на 11.

5. Для получения признака делимости на 13 ($b = 13$) будем иногда брать остатки от деления чисел 10^0, 10, 10^2, 10^3, ... на 13, а иногда и недостатки (взятые со знаком минус):

$$r_0=1,\ r_1=-3,\ r_2=-4,$$
$$r_3=-1,\ r_4=3,\ r_5=4,\ r_6=1,\ \ldots$$

(далее те же остатки повторяются, начиная с r_1 до r_6). Тогда

$$a_0-3a_1-4a_2-a_3+3a_4+4a_5+a_6-\ldots,$$
$$a_0-(3a_1+4a_2+a_3)+(3a_4+4a_5+a_6)-\ldots. \qquad (5)$$

Составим *алгоритм к сумме (5)*.

1. Разбиваем число справа налево на грани по 3 цифры, исключив первую цифру a_0 (в гранях могут оказаться и меньше трех цифр).
2. Занумеруем в каждой грани цифры справа налево так: a_1, a_2, a_3.
3. Вычислим сумму (5). Если значение этой суммы делится на 13, то и число делится на 13.

Пример 3. Установите делимость чисел на 13:
а) 52 651; б) 265 265 091;
в) 780 265 265 091.

Решение.

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 2 & 6 & 5 & 1\\ \text{а)} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & \end{array}$$

$$1-(3\cdot5+4\cdot6+2)+(3\cdot5)=1-41+15=-25,$$

не делится на 13, тогда 52 651 не делится на 13.

$$\begin{array}{cccccccccc} & 2 & 6 & 5 & 2 & 6 & 5 & 0 & 9 & 1\\ \text{б)} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & \end{array}$$

$$1-(3\cdot9+4\cdot0+5)+$$
$$+(3\cdot6+4\cdot2+5)-(3\cdot6+4\cdot2)=$$
$$=1-32+31-26=-26,$$

делится на 13, тогда 265 265 091 делится на 13.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 7 & 8 & 0 & 2 & 6 & 5 & 2 & 6 & 5 & 0 & 9 & 1\\ \text{в)} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & \end{array}$$

$$1-(3\cdot9+4\cdot0+5)+$$
$$+(3\cdot6+4\cdot2+5)-(3\cdot6+4\cdot2+0)+$$
$$+(3\cdot8+4\cdot7)=1-32+31-26+52=26,$$

делится на 13, тогда 780 265 265 091 делится на 13.

Пример 4. Докажите, что число $A = 888...8$, состоящее из 2022 цифр, делится на 13.

Решение. Возьмем число A_1 = 888 888, состоящее из 6 цифр, и применим к нему алгоритм:

$$8-(3\cdot8+4\cdot8+8)+(3\cdot8+4\cdot8)=8-8=0.$$

Так как 0 делится на 13, то и число A_1 делится на 13. Заметим, что $\frac{2022}{6}=337$. Тогда число A можно разбить на 337 граней, содержащих по шесть цифр. Следовательно, число A делится на 13.

Примечание 3. Если число b представляет собой произведение простых множителей, для которых признак Паскаля уже установлен, то легко установить признак делимости на это число. Например, если $b = 3 \cdot 11 = 33$, то число делится на 33, если оно делится на 3 и на 11.

В заключение предлагаю читателям поработать над проблемой получения других признаков делимости как следствий признака Паскаля.

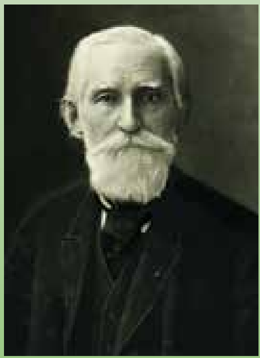
Литература

1. *Виленкин Н.Я.* Математика. Учеб. для 6 кл. общеобразоват. учреждений. — 30-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2013.
2. *Сефибеков С.Р.* Внеклассная работа по математике: кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1988.

В. ПЫРКОВ,
г. Батайск,
Ростовская обл.

К 200-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ П.Л. ЧЕБЫШЕВА

Анимированные модели всех механизмов, созданных П.Л. Чебышевым, можно найти на сайте tcheb.ru



Мозаичный портрет П.Л. Чебышева, Москва (1953 г.)

Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894) — русский математик и механик, создатель петербургской математической школы, академик Петербургской академии наук и других академий и научных обществ мира.

Детство и годы учебы

Пафнутий Львович Чебышев родился 4 мая 1821 года в дворянской семье в селе Окатово Калужской губернии. Семья была большая: у него было четыре брата и четыре сестры. Пафнутий был старшим из братьев. Первоначальное образование он получил на дому: мать занималась с ним грамотой, двоюродная сестра — французским и арифметикой; были еще занятия музыкой. С детства Пафнутий страдал недугом, из-за которого хромал и ходил с палочкой. Детских подвижных игр он избегал, зато любил уединяться и вырезать из дерева различные механизмы, которые можно было приводить в движение. Эта страсть к изобретательству и конструированию сохранилась у него на всю жизнь, так же как и стремление к уединению и невероятная работоспособность и сосредоточение на деле.

С 12 лет Пафнутий начинает изучать математику и физику под руководством одного из лучших учителей Москвы, известного автора учебников по элементарной математике и инспектора гимназий П.Н. Погорельского. Учебники П.Н. Погорельского, по которым обучался П.Л. Чебышев, удачно соединяли в себе полноту содержания с ясностью и сжатостью изложения*. Эти занятия окончательно утвердили Пафнутия в выборе профессии и сформировали его стиль работы в математике.

В 16 лет он поступает на физико-математическое отделение философского факультета Московского университета. Среди его преподавателей в университете были такие известные профессора, как Н.Д. Брашман, Н.Е. Зернов и Д.М. Перевощиков. Уже на втором году обучения П.Л. Чебышев пишет работу по нахождению корней уравнения n-й степени, которая была удостоена медали в конкурсе студенческих сочинений. Московский университет он окончил в 1841 году в статусе «отличнейшего кандидата» и был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию.

Научная и педагогическая деятельность

После защиты магистерской диссертации по теме «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» он переезжает в Петербург, где начинает чтение лекций по алгебре и теории чисел. В 28 лет Чебышев защищает диссертацию «Теория сравнений» на степень доктора математики и астрономии. Эта работа была отмечена Демидовской премией Академии наук. В этом же году П.Л. Чебышев

* Будучи членом ученого комитета Министерства народного просвещения по математическим наукам, П.Л. Чебышев рекомендовал учебник П.Н. Погорельского и отзывался о нем как о самом лучшем.

становится профессором Петербургского университета и вскоре избирается академиком Петербургской академии наук.

Научные интересы П.Л. Чебышева были весьма разнообразны и относятся к теории чисел, теории вероятностей, теории функций и теории механизмов. В каждом из этих разделов математики им получены значимые результаты. Для его научного творчества характерно стремление получить результат наиболее эффективным, простым и понятным способом. Созданные Чебышевым новые математические методы отличаются изяществом и глубиной.

В 50-е годы XIX века П.Л. Чебышев выводит формулу, которая позволяет приближенно определить число простых чисел, находящихся между единицей и любым натуральным числом N. Решение этой задачи на протяжении более чем двух тысячелетий занимало умы выдающихся математиков, среди которых были Эйлер, Лежандр, Гаусс и др., но именно Чебышев смог ее решить. Открытие Чебышева принесло славу русской математической науке и сразу выделило молодого математика в число первых ученых Европы.

П.Л. Чебышев по праву считается основателем русской школы теории вероятностей. Им получены существенные результаты в этой, тогда еще молодой, области математического знания. Одним из самых известных является доказательство закона больших чисел с помощью неравенства Чебышева, позволяющего оценивать отклонение частоты появления положительного исхода в эксперименте от теоретической вероятности этого события. В работах П.Л. Чебышева теория вероятностей обрела точные и лаконичные формулировки и строгие математические доказательства.

Не менее яркими были достижения Чебышева в математическом анализе: он разработал теорию наилучшего приближения функции и общую теорию полиномов, развил результаты Н.Х. Абеля по интегрированию иррациональных функций.

Характеризуя заслуги П.Л. Чебышева, академик И.Я. Сонин сказал: «Труды Чебышева носят отпечаток гениальности. Он изобрел новые методы для решения многих трудных вопросов, которые были поставлены давно и оставались нерешенными. Вместе с тем он поставил ряд новых вопросов, над разработкой которых трудился до конца своих дней». Знаменитый французский математик Шарль Эрмит называл П.Л. Чебышева «гордостью русской науки и одним из величайших математиков Европы», а шведский математик Густав Миттаг-Леффлер — «гениальным математиком и одним из величайших аналитиков всех времен».

Русский Архимед

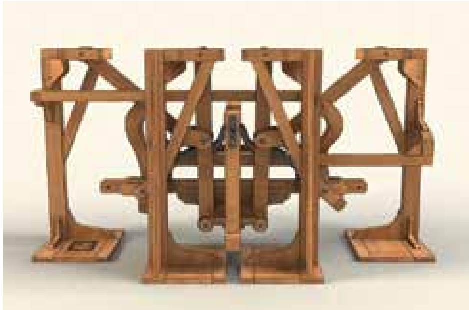
Много внимания П.Л. Чебышев уделял прикладным математическим задачам. Им написаны работы, относящиеся к построению географических карт, рациональному раскрою одежды, созданию различных механизмов и др. Особо его привлекали шарнирно-рычажные механизмы, служащие для преобразования прямолинейного движения в круговое и наоборот. В работе «О параллелограммах» (1869) впервые упоминается закономерность, в дальнейшем получившая его имя, формула Чебышева, которой должен удовлетворять механизм с одной степенью свободы: $3m - 2(n + v) = 1$, где m — число подвижных звеньев, n и v — число подвижных и неподвижных шарниров.

Всего ученым было разработано более 40 типов шарнирно-рычажных механизмов и около 80 их модификаций, которые нашли применение в современном машиностроении. Механизмы П.Л. Чебышева выставлялись на всемирных выставках в Филадельфии (1876), Париже (1878), Чикаго (1893). Внимание публики было приковано к самокатному креслу, ставшему прообразом инвалидной коляски; восторг вызывали стопоходящая машина, имитирующая движения животного при ходьбе; гребной автомат, повторяющий движение весел в лодке, и другие созданные П.Л. Чебышевым механизмы. Ему также принадлежит создание арифмометра, выполняющего быстро и точно четыре арифметических действия; единственный его экземпляр был подарен ученым Национальному музею искусств и ремесел в Париже.

Запись в метрической книге церкви с. Спас-Прогнанье за май 1821 года о рождении П.Л. Чебышева

Герб дворянского рода Чебышевых

Золотая медаль Российской академии наук имени П.Л. Чебышева



Стопоход

Арифмометр П.Л. Чебышева

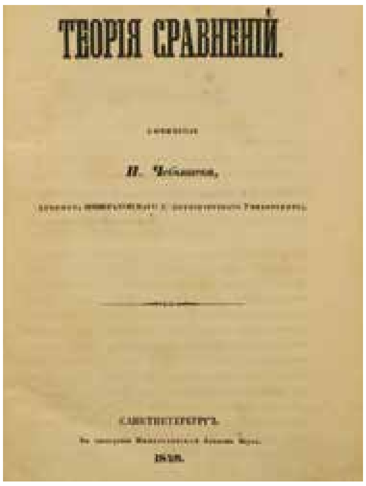
Основатель петербургской математической школы

Не менее важным, чем конкретные научные результаты, стало формирование П.Л. Чебышевым русской научной математической школы. В содружество ученых вошли многочисленные его ученики, среди них А.В. Васильев, Г.Ф. Вороной, Д.А. Граве, Е.И. Золотарев, А.Н. Коркин, А.М. Ляпунов, А.А. Марков, К.А. Поссе, И.Л. Пташицкий, Ю.В. Сохоцкий, В.А. Стеклов — математики с мировым именем, обогатившие своими исследованиями не только отечественную, но и мировую науку. С тех пор отечественные математики, продолжающие тематику исследований П.Л. Чебышева, причисляют себя к петербургской научной математической школе на правах «внуков» и «правнуков».

Пафнутий Львович Чебышев до последних дней жизни плодотворно работал и скоропостижно скончался 26 ноября 1894 года от сердечного приступа. Похоронен в родном имении, в фамильном склепе храма села Спас-Прогнанье Жуковского района Калужской области.

Интересные факты о П.Л. Чебышеве

- 28 августа 1878 года в Париже состоялось публичное выступление П.Л. Чебышева с докладом «О кройке одежды». Послушать выдающегося русского математика в столице европейской моды собралось небывалое множество публики. Каково же было ее удивление, когда он начал свое выступление с фразы: «Для простоты предположим, что человеческое тело имеет форму шара...»
- В течение многих лет Пафнутий Львович принимал активное участие в деятельности Военного артиллерийского ведомства и работал над усовершенствованием дальнобойности и точности стрельбы. В учебниках баллистики до сих пор пользуются формулой Чебышева для вычисления дальности полета снаряда.
- П.Л. Чебышев состоял в комиссии Министерства просвещения. Им были составлены программы и инструкции для учителей математики. Также сохранилось более двухсот обстоятельно написанных им рецензий на представляемые в комиссию школьные учебники математики.
- По свидетельству Д.А. Граве, П.Л. Чебышев позволял себя сравнивать только с Архимедом, намекая на свои знаменитые механизмы.
- На международном конгрессе математиков, когда о нем сказали «знаменитый русский математик», П.Л. Чебышев поправил говорящего, спросив: «Почему русский, а не мировой?».



ТЕОРІЯ СРАВНЕНІЙ.

П. Чебышева.

Титульный лист докторской диссертации П.Л. Чебышева

Самокатное кресло

Мемориальная доска на Доме академиков, Санкт-Петербург

Свидетельство о почетной премии
Международной выставки в Филадельфии, 1876 г.

Почтовые марки,
выпущенные в 1946 и 2011 годах

• По инициативе и при поддержке П.Л. Чебышева членом-корреспондентом Петербургской академии наук впервые была избрана женщина — С.В. Ковалевская.

• Мозг П.Л. Чебышева как представляющий интерес для науки был изъят для изучения и хранится в музее Военно-медицинской академии им. С.М. Кирова под № 950.

• Именем Чебышева названы бином, многочлены, неравенства, функции, множество, сети, фильтр и др. Его именем названы также астероид, кратер на Луне, горный хребет, улицы в различных городах, суперкомпьютер в вычислительном центре МГУ, исследовательская лаборатория в Санкт-Петербургском госуниверситете, ряд общеобразовательных школ, математический журнал «Чебышевский сборник».

• Раз в пять лет Российская академия наук за выдающиеся работы по математике присуждает Золотую медаль им. П.Л. Чебышева.

Высказывания П.Л. Чебышева

«Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных».

«Новое в преподавании математики полезно только тогда, когда на опыте проверено, что оно лучше старого».

«Нестрогие доказательства вредно действуют на умственные способности учеников, приучая их видеть там достаточную причину, где ее нет».

«Недостаточно, если ученик усвоит теорию, необходимо, чтобы ученик этой теорией овладел, а этого можно достигнуть только ее приложениями к практике и решением многочисленных задач и упражнений».

Рекомендуемая литература

Демьянов В.П. Рыцарь точного знания. — М.: Знание, 1991.

Лебедев С.Л. О Чебышеве и вокруг него. — М.: МИФИ, 2002.

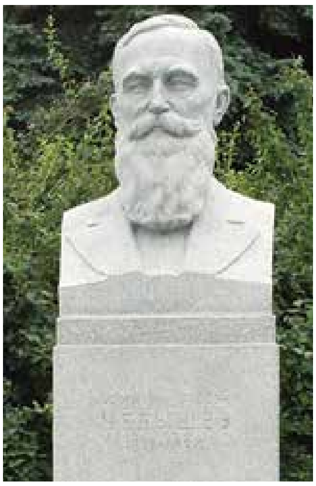
Отрадных Ф.П. Жизнь и творчество П.Л. Чебышева. — М.: Советская наука, 1953.

Панов В.Ф. Современная математика и ее творцы. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.

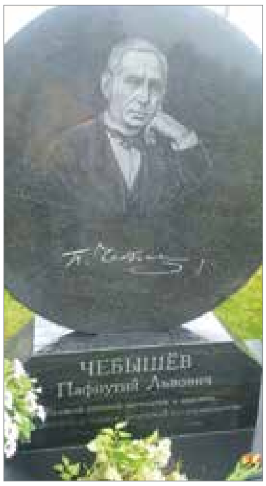
Прудников В.Е. Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894). — Л.: Наука, 1976.

Чистяков В.Д. Рассказы о математиках. — Минск, 1963.

Бюст П.Л. Чебышева,
с. Измалково, Липецкая область



Бюст П.Л. Чебышева
на Аллее ученых МГУ



Памятник П.Л. Чебышеву,
с. Окатово, Калужская обл.

Мемориальные таблички на стене
часовни над семейным склепом

Ф. ИВЛЕВ,
Э. АКОПЯН,
И. ЯЩЕНКО,
г. Москва

МАТПРАЗДНИК ДЛЯ МАТВЕРТИКАЛИ

Фото: olympiads.mccme.ru/matprazdnik

Ежегодно, начиная с 1990 года, в МГУ им. М.В. Ломоносова проводится Математический праздник — олимпиада для учащихся 6-х и 7-х классов. Для многих ребят это первое прикосновение к занимательной математике.

В Москве резко растет интерес к математике среди школьников: все больше ребят ходит в математические кружки, участвует в олимпиадах, запущен проект «Математическая вертикаль». Чтобы дать возможность этим ребятам поучаствовать в доступной по уровню олимпиаде, с 2020 года стал проводиться Математический праздник «Математической вертикали». Формат проведения мероприятия полностью отражает его название: это по-прежнему и олимпиада, и лекции для детей и их родителей, и математические игры с головоломками.

Часть заданий этой олимпиады — те же, что и в классическом празднике, остальные — более доступные. Почти все задачи проверяются только по ответу и не требуют сложных обоснований, пока труднодоступных для многих юных участников соревнования. Тем самым дети любого уровня подготовки получают возможность поучаствовать в олимпиаде и порешать интересные и доступные им задачи с понятным форматом проверки. Те, кто справился с большинством заданий, получают диплом, равноценный диплому призера классического Математического праздника.

В последние годы популярность праздника стала огромной, он вышел за территорию университета, распространившись по Москве и другим городам.

XXXII Математический праздник прошел 18 апреля 2021 года более чем на 100 площадках. В нем приняли участие больше 16 тысяч школьников: более 5 тысяч участвовали в классическом формате, более 11 тысяч — в формате Математического праздника «Математической вертикали». На сайте Математического праздника опубликованы тексты и видеоразборы заданий обеих олимпиад.

6 класс

Условия задач

1. На ферме имеется водопой, пастбище и сарай. Утром в сарае находились 3 зебры и 2 страуса, а у водопоя — 1 зебра и 3 страуса. В полдень шесть ног перебежали из сарая на пастбище. А в час дня восемь ног перебежали от водопоя в сарай. После этого времени никто никуда не бегал.

а) (*2 балла*) Кто перебежал в полдень?

б) (*2 балла*) Сколько зебр и страусов будет в сарае после часа дня?

2. (*1 балл*) а) Впишите в клеточки четыре различные цифры, что-бы произведение дробей равнялось $\frac{20}{21}$:

$$\frac{\square}{\square}\times\frac{\square}{\square}=\frac{20}{21}.$$

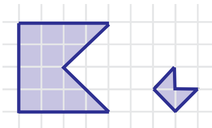
Решите эту задачу для трех других арифметических действий:

б) (*1 балл*) деления: $\frac{\square}{\square}:\frac{\square}{\square}=\frac{20}{21}$;

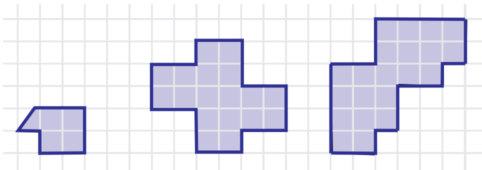
в) (*2 балл*) вычитания: $\frac{\square}{\square}-\frac{\square}{\square}=\frac{20}{21}$;

г) (*3 балла*) сложения: $\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}=\frac{20}{21}$.

3. Будем называть *флажком* пятиугольник, вершины которого — вершины некоторого квадрата и его центр (ниже нарисованы два флажка разных размеров).



Покажите, как можно разрезать фигуры а, б и в на флажки (флажки можно использовать любых размеров и в любом количестве).



а) (*1 балл*) б) (*2 балла*) в) (*4 балла*)

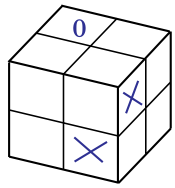
4. (*5 баллов*) Петя наблюдает, как два муравья ползут с постоянными скоростями по прямой дорожке. Через 3 мин после начала наблюдения расстояние между муравьями было 9 м, через 5 мин — 5 м, через 9 мин — 3 м. Каким было расстояние между муравьями через 8 мин после начала наблюдения?

5. (*8 баллов*) Вася решил зашифровать номер своего телефона. Для этого он заменил каждую цифру на символ, состоящий из одной или двух сторон / диагоналей квадрата, причем у каждой цифры свой уникальный код. Оказалось, что если у кодов двух цифр есть общий отрезок, то эти цифры отличаются не более чем на два.

Пете удалось расшифровать номер телефона Васи, когда он догадался, что номер начинается с цифры 8. Расшифруйте и вы.

6. (*5 баллов*) Каждая грань куба $2 \times 2 \times 2$ разделена на единичные квадраты. Маша хочет в некоторых квадратах написать крестики, а в остальных — нолики так, чтобы каждый квадрат граничил по сторонам с двумя крестиками и двумя ноликами.

а) (*4 балла*) Маша нарисовала два крестика и нолик (см. рис.). Докажите, что это неудачное начало: заполнить все квадраты Маша не сможет.



б) (*5 баллов*) Как Маша могла бы (начав заново) расставить крестики и нолики в соответствии со своим замыслом? Достаточно описать хотя бы одну расстановку.

Ответы и решения

1. а) Один страус и одна зебра; б) три страуса и три зебры.

В сарае изначально $3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16$ ног. Перебежали на пастбище шесть ног, значит, перебегали либо три страуса, либо страус и зебра. Но страусов в сарае всего два, значит, в полдень перебежали один страус и одна зебра. А в сарае при этом остались две зебры и один страус.

У водопоя изначально $1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 10$ ног. Перебежали в сарай восемь ног. Это могли быть две зебры, одна зебра и два страуса или четыре страуса. Но у водопоя всего одна зебра и всего три страуса. Значит, в сарай перебежали одна зебра и два страуса. Итого в сарае стало три страуса и три зебры.

2. а) $\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{20}{21}$; б) $\frac{4}{3}:\frac{7}{5}=\frac{20}{21}$;

в) $\frac{9}{7}-\frac{1}{3}=\frac{20}{21}$; г) $\frac{2}{7}+\frac{4}{6}=\frac{20}{21}$.

В пункте «а» достаточно было представить числитель и знаменатель в виде произведения двух цифр. Например, $20 = 4 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$, поэтому $\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{20}{21}$.

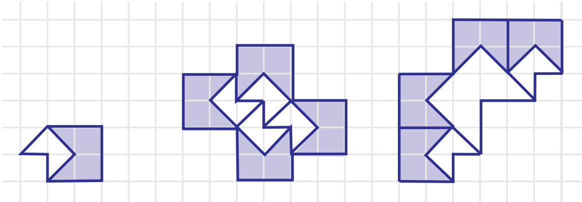
Пункт «б» можно было сделать из соображений того, что операция деления обратна к операции умножения, поэтому

$$\frac{4}{3}:\frac{7}{5}=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{20}{21}.$$

Для подбора дробей в пункте «в» нужно было выбрать знаменатели, которые в произведении дают 21, что означало, что после приведения к общему знаменателю у дроби будет знаменатель 21. Оставалось подобрать нужные числители.

В пункте «г»: не бывает необходимых несократимых дробей со знаменателями 3 и 7. Идея решения состоит в том, чтобы представить дробь $\frac{20}{21}$ как $\frac{40}{42}$ и искать дроби со знаменателями 7 и 6.

3. Ниже показано, как можно разрезать каждую из фигур.



а) б) в)

4. 1 м.

В условии ничего не сказано про направление движения муравьев. Всего возможны четыре состояния.

1. Муравьи движутся навстречу друг другу.
2. Муравьи удаляются друг от друга, двигаясь в противоположных направлениях.
3. Более быстрый муравей находится позади более медленного и приближается к нему (догоняет).
4. Более быстрый муравей находится впереди более медленного и удаляется от него.

Ясно, что ситуация 1 со временем может превратиться в ситуацию 2, а ситуация 3 — в ситуацию 4. Но если муравьи в некоторый момент попали в ситуацию 2 или 4, то с этого момента они будут всегда удаляться друг от друга.

Мы знаем расстояние между муравьями в три момента времени. Заметим, что между первым и вторым моментами прошло две минуты, а расстояние между муравьями уменьшилось на четыре метра. Между вторым и третьим моментами прошло четыре минуты, а расстояние уменьшилось на два метра. Поскольку оба раза расстояние уменьшалось, можно быть уверенным, что и через три, и через пять минут после начала наблюдения муравьи не находились в состоянии «удаления» (4) друг от друга, то есть они могли быть только в состояниях 1 или 3.

Если бы встреча между ними не произошла и в следующие четыре минуты (с пятой по девятую), то они бы оставались в том же состоянии (1 или 3) и по-прежнему сближались со скоростью четыре метра за две минуты, то есть должны были за четыре минуты сблизиться на восемь метров. Но расстояние между ними уменьшилось только на два метра, значит, когда-то между вторым и третьим моментами времени произошла встреча.

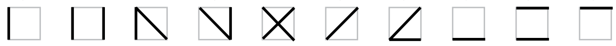
После встречи муравьи удаляются с той же скоростью, что и сближались (в ситуациях 1 и 2 скорости сближения и удаления равны сумме скоростей муравьев, а в ситуациях 3 и 4 — разности их скоростей). Значит, за четыре минуты расстояние между муравьями сократилось с пяти метров до нуля и затем выросло от нуля до трех метров.

Всего восемь метров за четыре минуты, что соответствует найденной ранее скорости сближения. А минутой ранее расстояние было на два метра меньше. Значит, через восемь минут после начала движения расстояние между муравьями было равно одному метру.

5. 83859206147.

Несложно убедиться, что номер 83859206147 подходит под условие задачи. Для этого достаточно выписать коды цифр 0, 1, 2, ..., 9 в таком порядке:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Докажем, что не могло быть других вариантов, и заодно покажем, как найти это решение. Заметим, что символ , обозначающий по условию цифру 8, имеет по одному общему отрезку с символами , и . Значит, три последних символа могут быть равны только 9, 7 и 6. А так как их ровно три, то все остальные символы кодируют цифры, меньшие 6. Теперь заметим, что символ имеет общий отрезок с символами и . Но поскольку оба последних символа меньше 6, то символ не может быть больше 6, а значит, он кодирует как раз цифру 6. Легко видеть, что символ , имеющий с ним общий отрезок, не может кодировать цифру 9, так как 9 и 6 отличаются более чем на 2. Следовательно, он кодирует цифру 7, а символ кодирует цифру 9.

Символы и , как мы уже выяснили, кодируют цифры 4 и 5, правда, еще неизвестно, какой именно символ соответствует 4, а какой — 5. Заметим, что символ имеет общий отрезок еще с двумя символами: и . Значит, он не может быть равен 5, потому что оба последних символа меньше 4, а значит, один из них не больше 2. Получаем, что кодирует 4, а — 5. По аналогичным соображениям можно увидеть, что символ имеет общий отрезок с двумя другими символами: и , а значит, он равен 2, а символ — 3. Наконец, поскольку символ имеет общий отрезок с , обозначающим 3, то он не может быть равен 0, а значит, кодирует 1. Код 0 определяется автоматически.

6. а) Посмотрим на квадратик, расположенный на передней слева грани, граничащий с двумя поставленными крестиками. У него уже есть два соседних крестика. Это значит, что два других квадратика, с которыми он граничит, должны быть с ноликами, чтобы условие выполнялось. Но эти два квадратика граничат с левым ближним квадратиком на верхней грани. Получается, что у этого квадратика будет уже три граничащих с ним нолика, что противоречит условию.

б) Существует несколько видов расстановок крестиков и ноликов, удовлетворяющих условию. Один из способов может быть описан следующим образом: если положить кубик на пол, то на нижней грани будут все крестики, на верхней — все нолики, на нижнем уровне (на высоте 1 по бокам) будет «пояс» из крестиков, на втором уровне (на высоте 2 по бокам) будет «пояс» из ноликов.

7 класс

Условия задач

1. (*3 балла*) У садовника Феди в саду растет чудо-дерево с семью ветками. На каждой из веток может расти либо 6 яблок, либо 8 груш, либо 3 апельсина. Федя обнаружил, что на дереве есть фрукты всех видов, причем больше всего выросло груш, а меньше всего — яблок. Сколько всего фруктов выросло на чудо-дереве?

2. (*4 балла*) Фокусник задумал два натуральных числа и сообщил Симе их сумму, а Прову — их произведение. Зная, что произведение равно 2280, Пров смог отгадать задуманные числа только после того, как Сима сообщила, что сумма у нее нечетная и двузначная. Так какие числа задумал фокусник?

3. См. задачу 3 для 6-го класса.

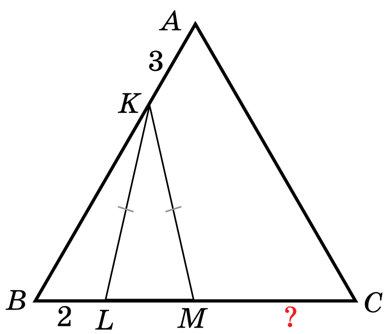
4. (*6 баллов*) Братья Петя и Вася решили снять смешной ролик и выложить его в интернет. Сначала они сняли, как каждый из них идет из дома в школу — Вася шел 8 минут, а Петя шел 6 минут. Потом пришли домой и сели за компьютер монтировать видео: они запустили одновременно Васино видео с начала и Петино видео с конца (в обратном направлении); в момент, когда на обоих роликах братья оказались в одной и той же точке пути, они склеили Петино видео с Васиным. Получился ролик, на котором Вася идет из дома в школу, а потом в какой-то момент превращается в Петю и идет домой задом наперед. А какой длительности получился ролик?

5. См. задачу 5 для 6-го класса.

6. На стороне AB правильного треугольника ABC выбрана точка K, а на стороне BC выбраны точки L и M таким образом, что $KL = KM$, причем точка L расположена к B ближе, чем M.

а) (*3 балла*) Найдите угол MKA, если известно, что $\angle BKL = 10°$.

б) (*5 баллов*) Найдите длину отрезка MC, если $BL = 2$, $KA = 3$. Ответы для каждого из пунктов обоснуйте.



Ответы и решения

1. 30.

Так как на дереве оказались фрукты всех видов, то хотя бы на одной ветке выросли яблоки, а значит, их не меньше 6. Поскольку яблок меньше всего, то апельсины выросли минимум на трех ветках, а значит, их хотя бы 9.

Осталось еще три ветки. Допустим, что на какой-то из них выросли не груши. Тогда груши выросли не более чем на двух ветках, что означает, что их не больше 10. При этом еще на одной ветке выросли либо яблоки, тогда их будет 12, либо апельсины, тогда их тоже будет 12. В обоих случаях груш не будет больше всего, а значит, наше предположение невозможно. Получаем, что на одной ветке выросло 6 яблок, на трех других по 3 апельсина и на оставшихся трех — по 5 груш. Итого $6 + 9 + 15 = 30$ фруктов.

2. 40 и 57.

Обозначим числа, загаданные фокусником, через a и b. Тогда, по условию, $a \cdot b = 2280$ и при этом число $a + b$ двузначно и нечетно. Так как произведение a и b четно, то хотя бы одно из них будет четно. Но если четными будут оба числа, то и их сумма будет четна, что неверно. Значит, одно из чисел четно, а другое нечетно.

Посмотрим тогда, какие простые множители могут входить в нечетное из этих чисел. Для этого разложим число 2280 на простые множители: $2280 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$. Получается, что в нечетное число могут входить только 3, 5, 19, причем все не более чем в первой степени, иначе в произведении со вторым числом не получится 2280. При этом остальные множители из этого набора будут вместе с 8 в произведении давать второе число. Так как оба числа должны быть меньше 100, получаем, что произведение нечетных множителей, не входящих в нечетное число, должно быть меньше, чем $\frac{100}{8} = 12{,}5$. Значит, в нечетном множителе присутствует число 19 и либо 3, либо 5, либо и 3, и 5. Небольшим перебором убеждаемся, что $19 \cdot 3 \cdot 5$ не подходит (тогда $19 \cdot 15 > 100$), также не подходит $19 \cdot 5$ (тогда числа будут равны $19 \cdot 5 = 95$ и $8 \cdot 3 = 24$ и $95 + 24 > 100$). Остается единственный вариант: $19 \cdot 3 = 57$ и $8 \cdot 5 = 40$, который удовлетворяет всем условиям, так как число $57 + 40 = 97$ двузначное и нечетное.

3. См. решение задачи 3 для 6-го класса.

4. 6 минут.

Пусть от момента запуска видео до момента, когда братья оказались в одной точке, прошло t минут (t необязательно целое). Тогда от Петиного видео оставалось до конца просмотра (то есть до начала ролика, так как видео идет задом наперед) $6 - t$ минут. Склеивая первые t минут Васиного ролика и оставшиеся $6 - t$ минут Петиного, получается видео продолжительностью $t + 6 - t = 6$ минут.

5. См. решение задачи 5 для 6-го класса.

6. а) 130°; б) 5.

Способ I. Отметим на отрезке MC точку N такую, что $NM = BL$. Так как треугольник LKM равнобедренный, углы KLM и KML при его основании равны. Значит, равны и смежные с ними углы KLB и KMN. Отсюда следует равенство треугольников BKL и NKM по второму признаку равенства треугольников. Значит,

$$\angle KNB = \angle KBL = 60^\circ,$$

то есть треугольник BKN тоже правильный.

Для решения пункта «а» заметим, что из равенства треугольников также следует, что

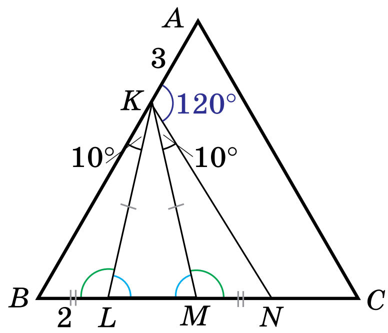
$$\angle MKN = \angle BKL = 10^\circ.$$

Тогда

$$\angle AKM = \angle AKN + \angle NKM = \\ = 180^\circ - \angle BKN + \angle NKM = \\ = 180^\circ - 60^\circ + 10^\circ = 130^\circ.$$

Для решения пункта «б» осталось заметить, что $BK = BN$ и $BA = BC$, а значит, $NC = KA$. Тогда

$$MC = MN + NC = BL + KA = 2 + 3 = 5.$$



Способ II. Проведем в треугольнике LKM высоту KF. Так как этот треугольник равнобедренный, то эта высота является также и биссектрисой, и медианой. Тогда по сумме углов треугольника в BKF находим, что

$$\angle BKF = 180^\circ - \angle KBF - \angle KFB = 30^\circ.$$

Следовательно,

$$\angle LKF = \angle BKF - \angle BKL = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ.$$

Так как KF — биссектриса угла LKM, получаем, что

$$\angle FKM = \angle FKL = 20^\circ.$$

Тогда

$$\angle AKM = 180^\circ - \angle BKL - \angle LKF - \angle FKM = \\ = 180^\circ - 10^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 130^\circ.$$

Для решения пункта «б» обозначим отрезок LF через x. Так как KF — медиана треугольника LKM, то

$$FM = FL = x.$$

С другой стороны, известно, что в треугольнике с углами 30°, 60°, 90° сторона, лежащая напротив угла в 30°, вдвое меньше гипотенузы. Пользуясь этим фактом, для треугольника BKF получаем, что

$$BK = 2 \cdot (x + 2) = 2x + 4.$$

Пользуясь равенством сторон AB и BC, можно составить уравнение

$$3 + 2x + 4 = 2 + 2x + MC,$$

откуда $MC = 5$.

Н. ЖАРКОВСКАЯ,
г. Санкт-Петербург

ПЕРВЫЕ ИТОГИ РАБОТЫ ЦТТ «КЕНГУРУ ПЛЮС»

25–30 января почти во всех регионах России прошла серия школьных математических мероприятий, организованных Центром технологии тестирования «Кенгуру плюс»: математическая игра для первоклассников «Смартик», конкурс-игра для учеников 2–10-х классов «Смарт КЕНГУРУ» и тестирование для учеников 11-х классов «Смарт ЕГЭ». Всего в них приняло участие более 350 тысяч учащихся.

Конкурс «Смарт КЕНГУРУ»

Главной новинкой стал конкурс для учеников 2–10-х классов «Смарт КЕНГУРУ». При подготовке этого события мы, конечно, учитывали опыт проведения международного математического конкурса «Кенгуру», над которым работали с 1995 по 2020 год. Однако, приступая к новому проекту, естественно посмотреть на задачу более широко. Так исторически сложилось, что, при всех успехах наших школьников в математических олимпиадах высокого уровня, непосредственно в школах традиционные математические олимпиады проводятся очень формально, а зачастую просто подменяются учительским отбором: кто хорошо успевает в классе, тот и идет «на район». А ведь потребность в соревновании есть у очень многих ребят. Именно поэтому конкурс «Кенгуру», ориентированный на школу, так быстро приобрел популярность в нашей стране. Конечно, за этим успехом стояла большая работа, как содержательная, так и организационная, но никакая работа не может обеспечить успех начинанию, если оно не востребовано. Впрочем, следует отметить, что конкурс «Кенгуру» тоже возник не на ровном месте, у него были достойные предшественники, которые, кстати сказать, до сих пор вполне успешно живут и развиваются. Среди них «American Mathematical Competition», «Canadian Mathematical Competition», «Australian Mathematics Competition», послуживший прототипом «Кенгуру», и целый ряд других. Все эти соревнования проводятся в школе, ориентированы на учащихся, не имеющих дополнительной математической подготовки, и имеют очень много общего.

- Хотя некоторые из них служат первой ступенькой при отборе на национальные олимпиады высокого уровня, все же основная их цель вызвать эмоции, доставить участникам удовольствие, дать им почувствовать уверенность в себе. Поэтому, например, среди заданий этих конкурсов обязательно есть совсем простые, но забавные задачи, есть какие-то картинки, броские и неожиданные формулировки.
- Поскольку соревнования массовые, то все они оформлены как тесты с выбором ответа, так как этот формат позволяет автома-

тизировать проверку и за обозримое время проверить сотни тысяч, а то и миллионы работ.

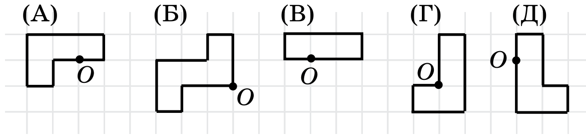
- Как правило, задачи разделены по уровням сложности, для каждого уровня за решенную задачу начисляется свое количество баллов.
- Это спринтерские соревнования: участникам предлагается решить большой набор задач за очень ограниченное время. Например, канадским школьникам предлагается 25 задач на 60 минут. А американские школьники и вовсе получают 30 задач на 30 минут. Правда, их честно предупреждают, что редко кому удается решить хотя бы 80% задач, а те, кто решит половину, заслуживают похвалы.

Конечно, при обсуждении формата нового конкурса мы старались учесть весь известный нам опыт. В итоге участники «Смарт КЕНГУРУ» получают 20 задач на 50 минут (у второклассников — 15 задач), задачи разбиты на три уровня сложности, они оцениваются в 3, 4 и 5 баллов соответственно. При этом в целом баланс смещен в сторону более легких задач: варианты для классов с 3-го по 10-й содержат по восемь задач, оцениваемых в 3 и в 4 балла, и только четыре задачи, оцениваемые в 5 баллов (для 2-го класса соответственно 6, 6 и 3).

Учитывая эмоциональную составляющую конкурса, а также то, что основную массу его участников (как и в «Кенгуру» в последние годы) составляют ученики начальной школы и 5–6-х классов, мы постарались ввести поощрительные оценки для широкого круга ребят. Теперь в школьном отчете в отдельной графе отмечаются те участники, которые при не очень высоком общем результате решили все (или почти все) простые задачи. Как правило, это старательные, аккуратные и внимательные ребята без опыта соревнований. Кроме того, мы отдельно отмечаем тех участников, кто успешно решил большую часть несложных, но нестандартных задач. Для решения этих задач нужно воображение и, не побоимся этих слов, интеллектуальная смелость. Такие ребята получают звание Смарт-магистра, о чем делается запись в сертификате участника.

Приведем несколько примеров задач, которые учитывались при формировании списка Смарт-магистров. Мы в скобках указываем параллель, в которой предлагалась задача, ее номер в варианте, категорию сложности, а также процент участников, решивших ее верно.

Задача 1. (*2-й класс, № 11, 4 балла, 36%*) Жучок ходит по сторонам клеток. Он вышел из точки O и вернулся обратно. В пути жучок поворачивал 5 раз. Его путь показан на одном из рисунков. На каком?



Задача 2. (*3–4-е классы, № 18, 5 баллов, 35%*) На рисунке изображена карточка.

1	2
4	3

Четыре таких карточки положили на стол так, что получился квадрат 3×3. Какая картинка не могла получиться?

(А)

1	2	2
4	3	3
4	4	3

(Б)

1	1	2
1	2	2
4	3	3

(В)

1	1	2
1	4	3
4	3	3

(Г)

1	1	2
4	1	2
4	4	3

(Д) Все четыре картинки могут получиться.

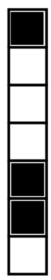
Задача 3. (*5–6-е классы, № 4, 3 балла, 49%*) На далекой планете Трям позавчера и послезавтра — это один и тот же день недели. Сколько дней в неделе на этой планете?

(А) 3 (Б) 4
(В) 5 (Г) 6 (Д) 7

Задача 4. (*7–8-е классы, № 10, 4 балла, 29%*) В каком из чисел (А)–(Д) нет цифры не меньше трех?

(А) 19 (Б) 21
(В) 37 (Г) 54 (Д) 82

Задача 5. (*9–10-е классы, № 12, 4 балла, 28%*) На каждой клетке полоски $1 \times n$ построили башенку из кубиков. В каждой башенке чередуются черные и белые кубики. При каком наименьшем n вид получившейся конструкции с одной из сторон может быть таким, как на рисунке?



(А) 3 (Б) 4
(В) 5 (Г) 6 (Д) 7

В организации конкурса «Кенгуру» всегда большую роль играли массовые награждения участников конкурса. Эту традицию мы, конечно же, продолжаем. Как правило, наши подарки — это какие-то школьные мелочи с символикой конкурса, футболки, сумки, а также книжки и буклеты по занимательной математике. Подарки, пусть и совсем небольшие, отправлены в каждую школу, которая приняла участие в конкурсе.

Скажем еще несколько слов о других январских мероприятиях.

Математическая игра для первоклассников «Смартик»

Математическая игра для первоклассников «Смартик» впервые прошла весной прошлого года, участвовали в ней только школьники Санкт-Петербурга. Премьера прошла удачно, и задачи «Смартика-2021» решали уже первоклассники практически по всей России. Всего в «Смартике» в этом году приняли участие более 70 тысяч ребят.

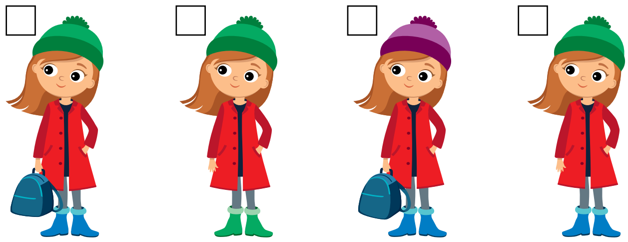
В названии мероприятия слово «конкурс» отсутствует не случайно. Первоклассники, конечно, тоже любят соревноваться, но зачастую слишком болезненно переживают свои неудачи. Поэтому главное в «Смартике» — это красочно оформленные, доступные и разнообразные задачи, а соревновательная сторона сведена к минимуму. Например, все участники получают одинаковые небольшие подарки (в этом году — значки).

Кроме того, каждый участник получает красочный буклет-сертификат, в котором продублированы все задачи (их всего 12). Дома можно еще раз просмотреть эти задачи и обсудить их с родителями. Еще одна особенность «Смартика» состоит в том, что выбранные ответы отмечаются прямо в листе с задачами, переносить их в бланк ответов не требуется, и это существенно облегчает малышам участие в игре.

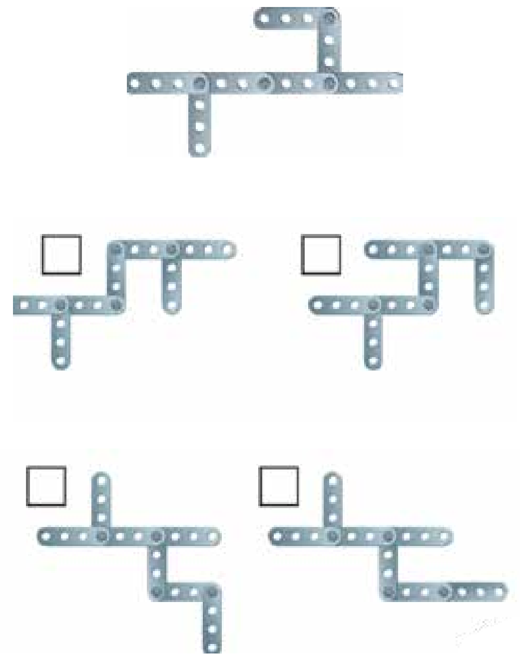
Анализ статистики показывает, что задачи оказались вполне адекватными уровню подготовки участников, и подавляющее большинство участников решили хотя бы несколько задач. Отметим еще, что все учителя, которые проводили игру «Смартик» для своих учеников, получили полезное учебное пособие — яркий настенный плакат с таблицей сложения и названиями компонентов арифметических действий.

В качестве примеров приведем здесь одну из самых легких задач игры и самую трудную задачу.

Задача 6. (*1-й класс, № 9, 92%*) Маша-Растеряша собиралась в школу. Она надела зеленую шапку, красное пальто и синие сапоги, а портфель забыла. Найди Машу-Растеряшу.



Задача 7. (*1-й класс, № 12, 27%*) Из одинаковых деталей и винтиков Смартик собрал конструкцию. Что можно из нее получить, если повернуть некоторые детали?



Тестирование «Смарт ЕГЭ»

Тестирование «Смарт ЕГЭ» адресовано одиннадцатиклассникам, которые готовятся к профильному экзамену по математике. Ориентировано оно на проверку готовности к решению заданий с развернутым ответом. Хотя задания теста представляют собой вопросы с выбором ответов, но подобраны и сформулированы они так, что требуют полного анализа ситуации. Задания сгруппированы в блоки, соответствующие актуальной структуре профильного экзамена по математике. Каждое из них может быть одним из шагов в решении соответствующей задачи ЕГЭ.

Участники тестирования получают индивидуальные рецензии, в которых указывается не только общий результат, но и оценка по каждому блоку вопросов отдельно. Кроме того, для каждого класса формируется отчет, содержащий подробную информацию о результатах отдельных участников, а также статистические данные по классу, по школе и по всему массиву участников тестирования.

Например, вот так выглядел блок «Смарт ЕГЭ-2021», соответствующий задаче по планиметрии.

Задача 8. (*11-й класс, IV*) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AB = 10$ и $CD = 26$ диагонали пересекаются в точке O и перпендикулярны боковым сторонам.

8.1. (*36%*) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

(А) 11 (Б) $8\sqrt{2}$
(В) 13 (Г) 18 (Д) $5+\sqrt{13}$

8.2. (*36%*) Найдите высоту трапеции.

(А) 10 (Б) 12
(В) 13 (Г) 14 (Д) 15

8.3. (*27%*) Найдите отношение

$$\sin\angle BAC : \sin\angle BDA.$$

(А) $\frac{5}{13}$ (Б) $\frac{2\sqrt{5}}{13}$
(В) $\frac{2\sqrt{13}}{5}$ (Г) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$ (Д) $\frac{10}{13}$

8.4. (*21%*) Найдите площадь треугольника AOD.

(А) 30 (Б) $43\frac{1}{3}$
(В) 54 (Г) 60 (Д) $86\frac{2}{3}$

Более подробную информацию обо всех этих мероприятиях, включая список заданий и видеоразборы решений, можно найти на нашем сайте mathkang.ru.

Конечно, запуск нового мероприятия — вещь всегда рискованная, но то, что все мы уже второй год живем в условиях пандемии и связанных с ней ограничений, вынуждает задуматься еще и о дистанционных формах работы. К счастью, в подавляющем большинстве регионов в январе школы работали без существенных ограничений и конкурс почти везде прошел в традиционном формате. Тем не менее мы подготовили техническую возможность проводить наши мероприятия удаленно. Это можно сделать через раздел «Личный кабинет» на нашем сайте. В таком формате конкурс прошел в Якутии, а также в ряде удаленных, труднодоступных районов.

Нельзя сказать, что работа платформы, обеспечивающей дистанционное проведение конкурса, была безукоризненной, но основную свою задачу она выполнила, а полученный опыт позволит нам в дальнейшем сделать ее еще более удобной для пользователей. Кроме того, наш личный кабинет будет полезен и тем учителям, кому не понадобилось организовывать дистанционное участие своих учеников. Например, через него можно оперативно получить результаты всех наших мероприятий. Есть и ряд других возможностей. Так, использование личного кабинета заметно упрощает организацию тестирований и получение их результатов.

Мы очень старались, чтобы наши новинки не разочаровали участников и всех, кто взял на себя заботу об их организации в своем регионе или школе. Надеемся, что наше сотрудничество продолжится.

Г. ФИЛИППОВСКИЙ,
г. Киев

Рисунки
Л. Наврозашвили

УГОЛ 120° В ОТВЕТЕ!
ИЗ МЕМУАРОВ БАРОНА МЮНХГАУЗЕНА

Как вы думаете, друзья мои, какой угол особенно любим мною?

Нет-нет, не 30°, не 60° и даже не 90°.

Сердце мое принадлежит замечательному углу 120°!

Во-первых, моя треуголка имеет наибольший угол, равный 120°.

Во-вторых, не секрет, что неприятель частенько старался загнать меня в угол: и в угол 15°, и в угол 30°, и даже в угол, равный 45°. Но никогда — в угол 120°! Да и разве можно загнать меня в такой, я бы сказал, широкий угол?

А в-третьих, задачи с таким широким углом вызывают аналогичную широкую улыбку! Вот почему я и собираю их по всему миру. Часть своей коллекции я хочу показать всем, кто любит или стремится полюбить геометрию.

Ну что ж, за работу, друзья! Замечу, что ответом во всех без исключения задачах будет угол, равный 120°.

1. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AC и AB в точках K и N соответственно. При этом $KN = r$, где r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите величину угла A.

Решение. Пусть точка I — центр этой окружности. Соединим K, N, I друг с другом (рис. 1).

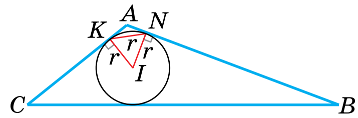


Рис. 1

Треугольник KIN — равносторонний со стороной r. Так как углы IKA и INA прямые (касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания) и $\angle KIN = 60°$, то в четырехугольнике $AKIN$ угол A равен 120°.

2. Найдите угол A треугольника ABC, если известно, что окружность с центром в вершине A проходит через точки B, C и O, где точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Обозначим окружность радиусом $AB = AC = AO$ с центром A через ω. Так как OA — это не только радиус окружности ω, но также и радиус окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 2), то

$$OA = OB = OC.$$

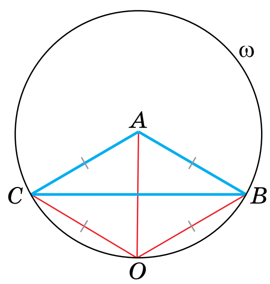


Рис. 2

Тогда, очевидно, треугольники AOB и AOC равносторонние, а угол A равен $60° + 60° = 120°$.

3. AL и BN — биссектрисы треугольника ABC. Кроме того, LN — биссектриса треугольника ALC. Найдите величину угла A.

Решение. Для треугольника ABL отрезок BN совпадает с внутренней биссектрисой угла B, а LN — с внешней биссектрисой угла ALB (*так барон называет биссектрису угла, смежного с данным. — Прим. пер.*). Поскольку для любого треугольника две внешние и одна внутренняя биссектрисы (когда они проведены из разных вершин) пересекаются в одной точке, то AN — внешняя биссектриса угла BAL и $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3).

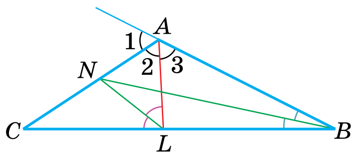


Рис. 3

Но $\angle 2 = \angle 3$ (AL также биссектриса), тогда

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \frac{180°}{3} = 60°$$

и

$$\angle A = \angle 2 + \angle 3 = 120°.$$

4. В неравнобедренном треугольнике ABC на продолжении биссектрисы AL (за точку A) взята точка T такая, что $\angle BTC = 60°$. Найдите величину угла A, если известно, что треугольники с общей стороной AT подобны и

$$AT^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}}$$

(S — площадь треугольника ABC).

Решение. Пусть $\angle ATC = \alpha$, тогда $\angle ATB = 60° - \alpha$. Они не могут быть равны, иначе треугольник ATC равен треугольнику ATB по стороне и двум прилежащим углам и $AB = AC$, что противоречит условию (рис. 4). Значит,

$$\angle ABT = \alpha,\ \angle ACT = 60° - \alpha.$$

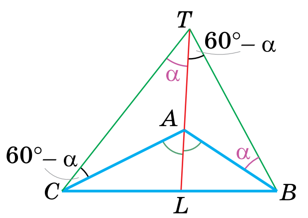


Рис. 4

Пусть также $AC = b$ и $AB = c$. Так как треугольник ATC подобен треугольнику ABT, то

$$\frac{b}{AT} = \frac{AT}{c},\ AT^2 = bc.$$

Согласно условию,

$$AT^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin\angle A}{\sqrt{3}},$$

то есть

$$\frac{2bc\sin\angle A}{\sqrt{3}} = bc,$$

откуда

$$\sin\angle A = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $\angle A = 60°$ или $\angle A = 120°$. Но угол A не может быть равным $60°$, поскольку

$$\angle BAC > \angle BTC = 60°.$$

Следовательно,

$$\angle A = 60° \cdot 2 = 120°.$$

5. В треугольнике ABC ортоцентр H симметричен центру O его описанной окружности относительно внешней биссектрисы угла A. Найдите величину угла A.

Решение. Согласно условию, внешняя биссектриса угла A совпадает с высотой и медианой в треугольнике HAO (рис. 5).

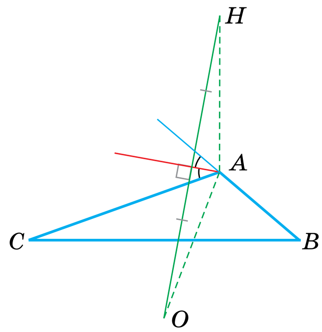


Рис. 5

Тогда

$$AH = AO = R.$$

Известна формула (*докажите!*)

$$AH = 2R\cdot|\cos\angle A|,$$

Значит,

$$R = 2R\cdot|\cos\angle A|,\ |\cos\angle A| = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, треугольник ABC тупоугольный с тупым углом A. Следовательно,

$$\cos\angle A = -\frac{1}{2},\ \text{а}\ \angle A = 120°.$$

6. Для биссектрисы $AL = l_a$ треугольника ABC выполняется равенство

$$\frac{1}{l_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Чему равен угол A этого треугольника?

Решение. Для треугольника ABC (рис. 6), в котором

$$AC = b,\ AB = c,\ AL = l_a,$$

справедлива формула

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\angle A}{2}.$$

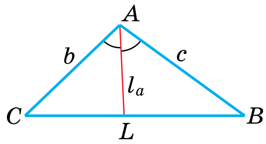


Рис. 6

По условию,

$$\frac{1}{l_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c},\quad \frac{1}{l_a} = \frac{b+c}{bc},\quad l_a = \frac{bc}{b+c}.$$

С учетом формулы биссектрисы l_a получаем:

$$\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{bc}{b+c},\quad \cos\frac{\angle A}{2} = \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\frac{\angle A}{2} = 60^\circ, \text{ а } \angle A = 120^\circ.$$

7. Отрезок OH, соединяющий центр описанной окружности с ортоцентром неравнобедренного треугольника ABC, параллелен биссектрисе AL. Найдите величину угла A.

Решение. Очевидно, треугольник ABC не может быть остроугольным, так как в этом случае прямая OH пересекает биссектрису AL. Продлим биссектрису AL до пересечения с описанной около треугольника ABC окружностью в точке W (рис. 7).

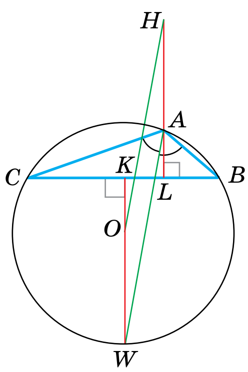


Рис. 7

Дуги CW и BW равны (равны вписанные углы CAW и BAW). Следовательно, луч WO совпадает с серединным перпендикуляром к BC (K —середина BC). Тогда $WO \parallel AH$ (они перпендикулярны стороне BC). По условию, $AW \parallel OH$. Значит, $OHAW$ — параллелограмм и

$$AH = WO = R,$$

то есть

$$2R \cdot |\cos\angle A| = R.$$

А так как угол A тупой, то

$$\cos\angle A = -\frac{1}{2} \text{ и } \angle A = 120^\circ.$$

8. Биссектриса AL треугольника ABC продолжена до пересечения с описанной около него окружностью в точке W. Найдите величину угла A, если известно, что ($AC = b$; $AB = c$)

$$AW = b + c.$$

Решение. Дуги BW и CW равны, так как

$$\angle BAW = \angle CAW = \frac{\angle A}{2}$$

как вписанные, значит, и хорды BW и CW равны (рис. 8). Пусть

$$BW = CW = n\,.$$

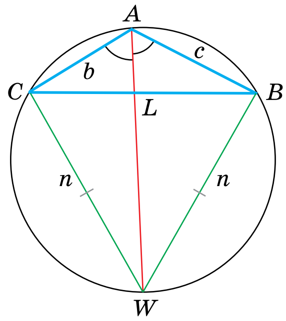


Рис. 8

По теореме Птолемея, для вписанного четырехугольника $ABWC$ получаем:

$$b \cdot n + c \cdot n = AW \cdot BC,$$
$$n(b+c) = AW \cdot BC.$$

Но по условию $AW = b + c$. Тогда $BC = n$ и треугольник BWC равносторонний. Так как $\angle BWC = 60^\circ$, то $\angle BAC = 120^\circ$.

Несколько задач с ответом $\angle A = 120^\circ$ предложу вам, друзья мои, решить самостоятельно.

9. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 2\angle BHC$, где H —ортоцентр в этом треугольнике. Найдите угол BAC.

10. Центр O окружности, описанной около треугольника ABC, симметричен вершине A относительно стороны BC. Чему равен угол A этого треугольника?

11. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AC и AB в точках K и T соответственно. Известно, что

$$\frac{AK}{KC} = \frac{1}{7} \text{ и } \frac{AT}{TB} = \frac{1}{6}.$$

Найдите величину угла BAC.

12. Известно, что в треугольнике ABC с тупым углом A отрезки AO и AH равны (O — центр описанной окружности, H — ортоцентр). Чему равен угол A?

13. Медиана AN треугольника ABC продолжена до пересечения с описанной около него окружностью в точке F. Известно, что

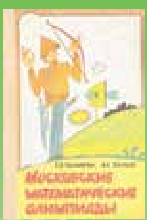
$$AF = 4AN = 2AB.$$

Найдите угол A этого треугольника.

Е. ИВАНОВА,
Г. ЛЕВИТАС,
г. Москва

Окончание. Начало см. в № 4

КОРОТКИЕ ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ



Публикация коротких задач Московских математических олимпиад показалась нам делом полезным и важным.

В этом номере даны короткие задачи Московских олимпиад начиная с 1948 года. Начиная с 1940 года олимпиады проводились отдельно для 7–8-х и для 9–10-х классов, а с 1952 года соревнования проводились по каждой параллели в отдельности. Предлагая задачи этого периода, мы будем отмечать, для какого возраста предлагалась та или иная задача.

Решения мы дали ко всем задачам, иногда они не совпадают с решениями в первоисточниках. Перед решениями мы иногда даем указания.

11-я олимпиада, 1948 г.

11.01. Сумма обратных величин трех целых положительных чисел равна 1. Каковы эти числа? Найти все решения.

Решение. Обозначим искомые числа через a, b и c, причем пусть будет $a \le b \le c$. Нужно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

Очевидно, ни одно из чисел a, b и c не может равняться 1. Может ли среди них быть число 2? Если это так, то $a = 2$, $b \ge 2$, $c \ge 2$. Тогда

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}.$$

Теперь минимальное значение b — это 3, и тогда $c = 6$. Если же $b = 4$, то и $c = 4$. Итак, если $a = 2$, то нашлось два ответа: (2; 3; 6) и (2; 4; 4).

Если $a = 3$, то
$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3},$$
$b \ge 3$, $c \ge 3$. Но больше, чем число 3, число b быть не может, так как тогда $b \ge 4$ и $c \ge 4$, а, значит, сумма обратных величин

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{2}<\frac{2}{3}.$$

Итак, если $a = 3$, то $b = 3$ и $c = 3$.

Больше числа 3 число a быть не может, так как тогда $a \ge 4$, $b \ge 4$, $c \ge 4$ и
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{3}{4}<1.$$

Ответ: (2; 3; 6), (2; 4; 4), (3; 3; 3).

11.04. Если число $\frac{2^n-2}{n}$ целое, то число $\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}$ целое. Доказать.

Доказательство. Пусть дробь $\frac{2^n-2}{n}$ равна целому числу m. Тогда

$$2^n - 2 = nm,\ 2^n - 1 = nm + 1.$$

Преобразуем числитель второй дроби:

$$2^{2^n-1}-2=2^{nm+1}-2=2\left(2^{nm}-1\right)=2\left(\left(2^n\right)^m-1\right).$$

И так как при любом целом значении x целое число $x^m - 1$ делится без остатка на целое число $x - 1$, то разность $(2^n)^m - 1$делится без остатка на разность $2^n - 1$, равную знаменателю второй дроби, и эта дробь оказывается равной целому числу.

11.05. Доказать без помощи таблиц, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2.$$

Указание.

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}. \qquad (*)$$

Доказательство. Заметив, что основания логарифмов разные, а логарифмируемые выражения одинаковые, приведем логарифмы к одному основанию, применив формулу (*):

$$\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}=\log_\pi 2+\log_\pi 5=\log_\pi 10>2,$$

потому что $10 > 3$, $15^2 > \pi^2$.

11.08. Решить в натуральных числах уравнение

$$x^y = y^x.$$

Найти все решения ($x \neq y$). *Указание.* $2^4 = 4^2$.

Решение. Пусть, например, $y > x$. Докажем, что тогда y делится на x без остатка. Для этого разложим x и y на простые множители. Тогда каждый простой множитель p окажется в разложении числа x не в большей степени, чем в разложении числа y. Иначе получилось бы, что этот множитель в левой части данного уравнения содержится и подавно в большей степени, чем в правой части (показатель y больше, чем показатель x), и равенство невозможно. Значит, каждый простой делитель числа x является делителем числа y, причем в не меньшей степени. Но тогда y делится на x. Запишем это так: $y = kx$, где k — натуральное число, большее единицы.

Подставим в данное уравнение $y = kx$ и выразим x и y через одну и ту же переменную k:

$$x^y = y^x;$$
$$x^{kx} = (kx)^x;$$
$$(x^k)^x = (kx)^x;$$
$$x^k = kx;$$
$$x^{k-1} = k;$$
$$x=k^{\frac{1}{k-1}}.$$

А отсюда

$$y=kx=k^{1+\frac{1}{k-1}}=k^{\frac{k}{k-1}}.$$

Рассмотрим возможные значения натурального числа k, не равного 1. Если $k = 2$, то $x = 2$, $y = 4$. Это возможная пара чисел ($2^4 = 4^2$).

Если же $k > 2$, то $x=\sqrt[k-1]{k}$. Покажем, что это равенство неосуществимо при натуральных x и k. В самом деле, если корень из натурального числа имеет показатель на единицу меньший подкоренного выражения, то такой корень обязательно больше единицы и меньше двух:

$$1<\sqrt[k-1]{k}<2.$$

Первое неравенство верно, потому что $k > 1$. Второе вытекает из графического решения неравенства (рис. 1)

$$k < 2^{k-1}, \text{ или } t + 1 < 2^t.$$

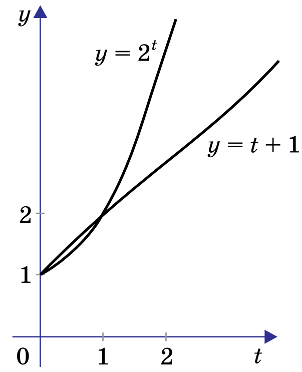


Рис. 1

Видно, что при всех $t > 1$ это неравенство справедливо. И так как между единицей и двойкой натуральных чисел нет, то равенство $x=\sqrt[k-1]{k}$ для натурального x невозможно.

Найденное решение ($x = 2$; $y = 4$) и симметричное ему при $x > y$ ($x = 4$, $y = 2$) являются единственными для различных натуральных значений неизвестных.

Ответ: (2; 4) и (4; 2).

11.10. Может ли фигура иметь больше одного, но конечное число центров симметрии?

Доказательство. Пусть фигура Ф имеет два центра симметрии: O_1 и O_2 (рис. 2).

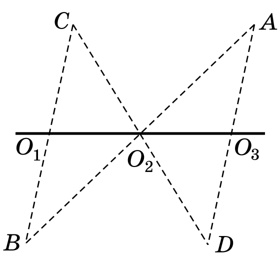


Рис. 2

Построим точку O_3, симметричную центру O_1 относительно центра O_2. Докажем, что для любой точки A фигуры Ф найдется точка, симметричная ей относительно O_3. Это и будет означать, что O_3 окажется также центром симметрии фигуры Ф.

В самом деле, построим:

– точку B, симметричную выбранной точке A относительно центра O_2 и, значит, принадлежащую фигуре Ф;

– точку C, симметричную построенной точке B относительно центра O_1 и, значит, принадлежащую фигуре Ф;

– точку D, симметричную построенной точке C относительно центра O_2 и, значит, принадлежащую фигуре Ф.

Точка D окажется симметричной точке A относительно центра O_3, так как $AO_3 = O_3D$, что и требовалось доказать.

Для точек A, лежащих на прямой O_1O_2, чертеж будет иным, но построения и вывод останутся такими же (рис. 3):

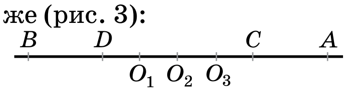


Рис. 3

– точка D окажется симметричной точке A относительно центра O_3;

– точка B симметрична точке A относительно O_2, $AO_2 = BO_2$;

– точка C симметрична точке B относительно O_1, $BO_1 = CO_1$;

– точка D симметрична точке C относительно O_2, $CO_2 = DO_2$.

Точка D симметрична точке A относительно центра O_3, потому что

$$DO_3 = DO_2 + O_3O_2 = CO_2 + O_2O_1 = BO_1 = \\ = BO_2 - O_1O_2 = AO_2 - O_2O_3 = AO_3.$$

Так же можно построить еще один центр, симметричный центру O_2 относительно центра O_3, и т.д. до бесконечности.

Важно заметить, что новые центры симметрии можно строить так, что никакой новый центр не будет совпадать ни с каким уже имеющимся. Достаточно каждый из них строить как симметричный предпоследнему относительно последнего. Тогда все они будут расположены на одной прямой, проходящей через центры O_1 и O_2, и расстояние между точкой O_1 и каждым новым центром каждый раз будет больше предыдущего на отрезок, равный отрезку O_1O_2 (рис. 4).

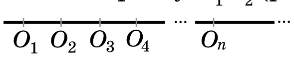


Рис. 4

Ответ: нет, у любой фигуры, имеющей два центра симметрии, найдется третий, четвертый и т.д. центры симметрии, и их окажется бесконечно много.

11.13. Найти все рациональные положительные решения уравнения $x^y = y^x$ (указать формулу, дающую все решения, $x \neq y$).

Ответ: $x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^p$, $y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}$, где p — любое натуральное число.

Полезно проверить этот ответ непосредственной подстановкой перед разбором решения задачи.

Решение. Пусть $y = kx$, где k — положительное рациональное число, не равное единице. Тогда (см. начало решения задачи 11.08)

$$x = k^{\frac{1}{k-1}}, \quad y = k^{\frac{k}{k-1}}.$$

Перейдем к работе с натуральными числами, обозначив рациональное число $\frac{1}{k-1}$ отношением двух взаимно простых чисел p и q. Из соотношения

$$\frac{1}{k-1} = \frac{p}{q}$$

получим:

$$k = \frac{p+q}{p};$$

$$x = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p}{q}},$$

$$y = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p+q}{q}}.$$

При $q = 1$ и любом натуральном p числа x и y оказываются рациональными положительными числами и, как мы проверили, удовлетворяют данному уравнению. Оказывается, что любое другое натуральное q, взаимно простое с p, уравнению не удовлетворяет. Покажем это.

Если q — натуральное число, не равное единице, то полученные выражения для x и y оказываются корнями степени q из дроби $\frac{p+q}{p}$. Эта дробь несократима, так как числа p и q взаимно простые. Поэтому корни степени q должны извлекаться нацело и из $p + q$, и из p. Значит, если $q \geq 2$, то $\sqrt[q]{p}$ равен некоторому натуральному числу n, откуда $p = n^q$. И при этом корень степени q из числа $p + q$ тоже должен равняться некоторому натуральному числу. Однако именно этого последнего и не происходит. Оказывается, $\sqrt[q]{p+q}$ при $p = n^q$ всегда расположен внутри интервала между двумя соседними натуральными числами n и $n + 1$. То есть выполняется двойное неравенство

$$n < \sqrt[q]{p+q} < n+1,$$

$$n^q < n^q + q < (n+1)^q.$$

Первое из этих двух неравенств очевидно, а второе доказывается путем сравнения выражения $n^q + q$ с двумя начальными слагаемыми правой части;

$$n^q + qn^{q-1} + \ldots$$

Итак, остается принять только значение q, равное единице, и ответ получен.

11.14. Поместить в куб окружность наибольшего возможного радиуса.

Решением будет окружность, вписанная в сечение куба плоскостью, проходящей через середины трех попарно скрещивающихся ребер (рис. 5).

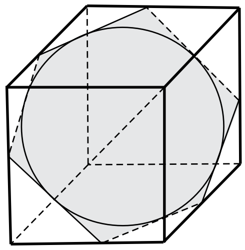


Рис. 5

Эта плоскость имеет сечением куба правильный шестиугольник, она перпендикулярна диагонали куба и проходит через его центр.

11.15. Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство

$$|x|+|y|<100?$$

Решение. Все решения этого неравенства находятся внутри квадрата (рис. 6), ограниченного прямыми

$$y = x + 100,\ y = -x + 100,$$
$$y = x - 100,\ y = -x - 100.$$

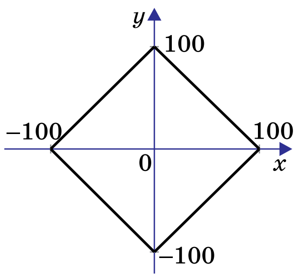


Рис. 6

Целочисленные решения представляют собой пары $(x; y)$, для которых верно неравенство

$$|x|+|y|\le 99.$$

Отсюда следует расчет возможных вариантов.

1) Сколько решений будет в первой четверти при $x > 0$ и $y > 0$?

Если x равен	1	2	3	...	98
Количество возможных значений для y	98	97	96		1

Количество решений равно

$$1+2+3+\ldots+98=\frac{98+1}{2}\cdot 98=4851.$$

Столько же решений будет в трех остальных четвертях, при $x \ne 0$ и $y \ne 0$, всего 19 404.

2) На осях координат находится еще $99 \cdot 4 = 396$ решений:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=\pm1; \pm2; \pm3; \ldots; \pm99 \end{cases} \text{и} \begin{cases} y=0, \\ x=\pm1; \pm2; \pm3; \ldots; \pm99. \end{cases}$$

3) И еще одно решение: $x = 0$; $y = 0$.

Всего получается 19 404 + 396 +1 = 19 801 решений.

Ответ: 19 801 решений.

12-я олимпиада, 1949 г.

12.01. (*7–8-е классы*) Показать, что

$$27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8 \qquad (*)$$

делится на 26 460.

Решение. Если некоторое число a делится на b, то в разложении числа a на множители есть все множители числа b. Поэтому разложим число 26 460 на множители:

$$26\,460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

и выясним, какие множители есть в разложении числа (*).

$$27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8 =$$
$$= (27\,195^8 - 10\,887^8) + 10\,152^8.$$

Разность $27\,195^8 - 10\,887^8$ делится на разность оснований:

$$27\,195 - 10\,887 = 16\,308 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 151,$$

а

$$10\,152 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 47,$$

поэтому число (*) делится на $2^2 \cdot 3^3$.

Число (*) можно записать и по-другому:

$$27\,195^8 - (10\,887^8 - 10\,152^8).$$

Тогда

$$27\,195 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 37,$$

а разность $10\,887^8 - 10\,152^8$ делится на разность оснований:

$$10\,887 - 10\,152 = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2,$$

значит, все число делится на $3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Видим, что появились последние два множителя, $5 \cdot 7^2$, из разложения числа 26 460. Числа $2^2 \cdot 3^3$ и $5 \cdot 7^2$ взаимно простые, поэтому в разложении числа (*) есть и $2^2 \cdot 3^3$, и $5 \cdot 7^2$, значит, это число делится на 26 460.

12.02. (*7–8-е классы*) Доказать, что если плоский многоугольник имеет несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

Доказательство основано на знаниях из физики о центре масс. Если многоугольник нагружен одинаковыми массами в каждой его вершине и при этом имеет ось симметрии, то центр его масс лежит на оси симметрии. А так как у любого объекта центр масс только один, то все оси симметрии проходят через эту точку — центр масс многоугольника.

12.03. (*7–8-е классы*) Доказать, что равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

для целых значений x, y, z возможно только при $x = y = z = 0$.

Доказательство. Если хоть одно из неизвестных равно нулю, то правая часть уравнения равна нулю. Тогда равна нулю и левая его часть — сумма квадратов нескольких чисел. А тогда равно нулю каждое из этих чисел. Нам остается попробовать найти целые значения неизвестных, ни одно из которых не равно нулю. В этом случае можно искать натуральные решения уравнения. Если их не окажется, то нет и целых ненулевых решений. А если они окажутся, то легко будет найти и все ненулевые целые решения.

Итак, пусть все неизвестные — натуральные числа. Поскольку правая часть уравнения делится на 2, то слева могут быть либо одно число четное, а два других нечетные, либо только четные числа.

В первом случае получаем, что и справа имеется два неизвестных нечетных и одно четное число, так что правая часть делится на 4. Слева же имеем сумму квадратов двух нечетных чисел, не делящуюся на 4, и квадрат четного числа, делящийся на 4. То есть левая часть на 4 не делится. Этот вариант невозможен.

Осталось рассмотреть случай, когда все три неизвестные — четные числа. Разложим каждое из них на простые множители. Пусть в числе x окажется множитель 2^n, в числе y окажется 2^m и в числе z окажется 2^k. То есть пусть будет $x = 2^n a$, $y = 2^m b$, $z = 2^k c$, где a, b, c — нечетные числа. И пусть при этом будет $n \le m \le k$. Тогда уравнение запишется так:

$$2^{2n}a^2 + 2^{2m}b^2 + 2^{2k}c^2 = 2^{n+m+k+1}abc.$$

Разделив обе части уравнения на 2^{2n}, получим:

$$a^2 + 2^{2(m-n)}b^2 + 2^{2(k-n)}c^2 = 2^{m+k-n+1}abc.$$

Правая часть уравнения делится на 2^{k+1}, так как $m - n \ge 0$, то есть делится на 4: ведь k не меньше единицы. Рассмотрим левую часть последнего уравнения. Число a^2 нечетно, а вся сумма должна быть четной. Это возможно, если одно из следующих слагаемых тоже нечетно, а другое четно. Значит, должно быть $m = n$ и $k > n$. Значит, сумма

$$a^2 + b^2 + 2^{2(k-n)}c^2$$

должна делиться на 4. Но квадраты нечетных чисел a и b при делении на 4 дают в остатке единицы, значит, их сумма не делится на 4, а последнее слагаемое — квадрат четного числа — делится на 4. Значит, и этот случай невозможен.

Ответ: решения в натуральных числах нет, единственное решение (0; 0; 0).

12.06. (*9–10-е классы*) Найти такие целые числа x, y, z, u, что

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu.$$

Решение. Как и в задаче 12.03, убеждаемся, что если хоть одно неизвестное равно нулю, то и остальные тоже. Так же, как и там, решаем задачу в натуральных числах.

Правая часть уравнения — четное число. Следовательно, в левой части среди четырех неизвестных либо все четыре нечетные числа, либо два четных и два нечетных, либо все четыре четные.

Если все числа нечетные, то их квадраты при делении на 4 дают в остатке по единице, а значит, левая часть уравнения делится на 4. Между тем в этом случае правая часть уравнения на 4 не делится. Этот случай невозможен.

Если четных слагаемых слева два и нечетных два, то левая часть делится на 2, но не на 4, а правая делится на 8, равенство невозможно.

Если же все числа четные, то поступаем, как в задаче 12.03. Обозначаем:

$$x = 2^n a,\ y = 2^m b,$$
$$z = 2^k c,\ u = 2^l d,$$

где a, b, c, d — нечетные числа. И пусть при этом будет

$$n \le m \le k \le l.$$

Тогда уравнение запишется так:

$$2^{2n}a^2 + 2^{2m}b^2 + 2^{2k}c^2 + 2^{2l}d^2 = 2^{n+m+k+l+1}abcd,$$
$$a^2 + 2^{2(m-n)}b^2 + 2^{2(k-n)}c^2 + 2^{2(l-n)}d^2 =$$
$$= 2^{m+k+l-n+1}abcd.$$

Коэффициент $2^{m+k+l-n+1}$ делится на 8, ведь k и l не меньше единицы, а $n \le m$.

Рассмотрим левую часть последнего уравнения. Число a^2 нечетно, значит, либо первые два слагаемых нечетные, а последние два четные, либо все четыре слагаемых нечетные. В первом из этих случаев сумма квадратов не делится на 8. Покажем, что и во втором случае то же. Каждое слагаемое при делении на 8 дает в остатке 1, значит, сумма при делении на 8 дает в остатке 4. И этот случай невозможен.

12.07. (*9–10-е классы*) Как расположены плоскости симметрии ограниченного тела, если оно имеет две различные оси вращения? *Указание*. Осью вращения тела называется прямая, после поворота вокруг которой на любой угол тело совмещается само с собой.

Ответ: все плоскости симметрии проходят через точку пересечения осей вращения, и каждая плоскость симметрии содержит какую-либо из этих осей.

12.08. (*9–10-е классы*) Найти действительные корни уравнения

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} \quad \left(0 < a < \frac{1}{4}\right).$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = \left(x^2 + 2ax + a^2\right) + \left(\frac{1}{16} - a^2\right) = (x+a)^2 + \left(\frac{1}{16} - a^2\right),$$

обозначим это выражение как $y = f(x)$. Обозначим правую часть уравнения через y и сделаем преобразования:

$$y=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}};\quad y+a=\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}.$$

Так как $a<\frac{1}{4}$, то при $y\geq-\frac{1}{4}$ можно возвести обе части равенства в квадрат:

$$(y+a)^2=a^2+x-\frac{1}{16},$$

откуда

$$x=(y+a)^2+\left(\frac{1}{16}-a^2\right),$$

и мы видим, что x в правой части уравнения зависит от y так же, как y зависит от x в левой части уравнения:

$$x=f(y) \text{ и } y=f(x).$$

И если построить графики левой и правой частей уравнения, то они будут симметричны относительно прямой $y = x$, если они пересекаются, то точки пересечения находятся на прямой $y = x$, значит, $x = y = f(x)$. Поэтому

$$x=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}},$$

откуда и получаются корни уравнения:

$$x+a=\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}},\quad x^2+2ax+a^2=a^2+x-\frac{1}{16},$$

$$x^2+2ax=x-\frac{1}{16},\quad x^2+x(2a-1)+\frac{1}{16}=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=\frac{1-2a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2-\frac{1}{16}}.$$

Поскольку $0<a<\frac{1}{4}$, то дискриминант $\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2-\frac{1}{16}>0$ и корни действительные.

Ответ: $\left(\frac{1-2a}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2-\frac{1}{16}}.$

13-я олимпиада, 1950 г.

13.02. (*7–8-е классы*) Имеется 555 гирь массой 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, ..., 555 г. Разложить их на три равные по массе кучи.

Решение. Это типичный случай, когда для отыскания решения полезно поэкспериментировать с числами меньшими, чем данные. Но спросим себя: какие суммы нескольких подряд идущих натуральных чисел удается разделить на три равные части, не дробя самих слагаемых? Прежде всего воспользуемся формулой суммы n первых подряд идущих натуральных чисел: $\frac{n(n+1)}{2}$. Это число всегда целое и по своему смыслу (это сумма целых чисел), и по тому, что мы видим: одно из чисел в числителе всегда четно. А вот чтобы это целое число делилось еще и на 3, требуется, чтобы число n при делении на 3 не давало в остатке 1. Так и есть в нашем случае: 555 делится на 3 без остатка. Поэтому естественно экспериментировать с числами 3, 6 и т.д. И только при отсутствии результата перейти к числам 5, 8 и т.д.

Попробуем разделить на три равные кучи три гири в 1, 2 и 3 грамма. Это не получится, так как пилить гирю нельзя. А вот с шестью гирями: 1, 2, 3, 4, 5 и 6 грамма, получается сразу:

$$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4.$$

Если бы 555 делилось на 6, задача была бы решена: мы бы каждую шестерку отдельно разделили на три группы таким же образом, а затем сложили в одну кучу первые группы от всех шестерок, во вторую — вторые, в третью — третьи. Может быть, так и поступим в конце концов, придумав хороший способ выделения лишних гирь.

Но три лишние гири выделять бессмысленно: их на три равные группы не разделишь. Попробуем выделить не три, а девять гирь; тогда останется 546, а это количество делится на 6. Но тогда надо понять, что делать с девятью подряд идущими гирями. И тут снова все замечательно. Девять гирь от 1 до 9 делятся на три группы так:

$$1 + 5 + 9 = 2 + 6 + 7 = 3 + 4 + 8.$$

Вообще, если девять чисел идут подряд: n, $n + 1$, $n + 2$, ..., $n + 8$, то, взяв первое, пятое и девятое число в первую группу, а второе, шестое и седьмое число во вторую, мы получим во всех трех группах одинаковые суммы. Теперь задача легко решается двумя способами:

1) забираем первые девять или последние девять гирь и делим эту девятку указанным способом, а оставшиеся 546 гирь делим на шестерки, начиная с первой и до последней, и каждую шестерку делим на равные группы, как показано выше;

2) забираем первые шесть или последние шесть гирь и делим эту шестерку указанным способом, а оставшиеся 549 гирь делим на девятки, начиная с первой и до последней, и каждую девятку делим на равные группы, как показано выше.

13.08. (*9–10-е классы*) Имеется 81 гиря массами 1^2 г, 2^2 г, 3^2 г, ..., 81^2 г. Разложить их на три равные по массе кучи.

Решение. Любые девять гирь с массами n^2, $(n + 1)^2$, ..., $(n + 8)^2$ можно так разложить на три группы, что две группы будут иметь одинаковую массу, а третья будет на 18 г легче. Вот это распределение:

$$(n^2, (n+5)^2, (n+7)^2);$$
$$((n+1)^2, (n+3)^2, (n+8)^2);$$
$$((n+2)^2, (n+4)^2, (n+6)^2).$$

Разложим первые девять гирь так, чтобы первыми двумя оказались равные группы, а третья группа была легче на 18 г.

Разложим следующие за ними девять гирь так же, но первой и третьей назовем равные группы, а второй — более легкую (на 18 г).

Наконец, следующие за ними девять гирь разложим так же, но первой группой назовем более легкую (на 18 г), а второй и третьей — равные группы гирь.

Сгруппировав все первые, все вторые и все третьи группы, получим разложение любых 27 последовательных гирь на три кучи равной массы. Осталось повторить эту процедуру 3 раза, и тогда все гири окажутся разложенными требуемым способом.

13.09. (*9–10-е классы*) Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Решение. Оба подкоренных выражения являются полными квадратами:

$$x+3-4\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}\right)^2-4\sqrt{x-1}+4=\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2$$

и

$$x+8-6\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}\right)^2-6\sqrt{x-1}+9=\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2.$$

Исходное уравнение переписывается следующим образом:

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1.$$

Обозначив $\sqrt{x-1}$ через t, построим график (рис. 7)

$$y=|t-2|+|t-3|.$$

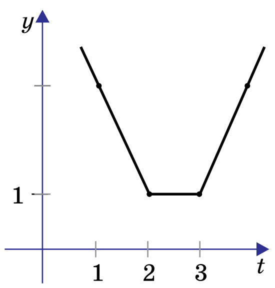


Рис. 7

Значение $y = 1$ достигается при $2 \le t \le 3$, значит,

$$2\le\sqrt{x-1}\le 3$$

и

$$5\le x\le 10.$$

13.12. (*7–8-е классы*) Доказать, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

Доказательство. Если между каждыми двумя соседними множителями $\frac{n}{n+1}$ и $\frac{n+2}{n+3}$ вставить множитель $\frac{n+1}{n+2}$, то получится произведение

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{97}{98}\cdot\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100},$$

в котором все числители и знаменатели сокращаются, кроме первого числителя 1 и последнего знаменателя 100. Тем самым, это произведение будет равно $\frac{1}{100}$.

Обозначим через A данное произведение:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{97}{98}\cdot\frac{99}{100},$$

содержащее 50 множителей, и через D дополнительное произведение:

$$D=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99},$$

содержащее 49 множителей. Мы видели, что $AD=\frac{1}{100}$. Последнему множителю из A, равному $\frac{99}{100}$, нет пары в произведении D. Обозначим

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{97}{98}$$

и запишем

$$A=A_1\cdot\frac{99}{100}.$$

Отсюда видно, что $A < A_1$. Но так как

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}<\frac{4}{5},\ \ldots,\ \frac{97}{98}<\frac{98}{99},$$

то $A_1 < D$, значит, $A < D$. Умножив обе части последнего неравенства на A, получим:

$$A^2<AD=\frac{1}{100},$$

значит, $A<\frac{1}{10}$, что и требовалось доказать.

13.17. (*9–10-е классы*) Около сферы описан пространственный четырехугольник. Доказать, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

Доказательство. Пусть сфера касается сторон AB, BC, CD и AD данного четырехугольника в точках K, L, M и N соответственно. Тогда

$$AN = AK,\ BK = BL,\ CL = CM,\ DM = DN.$$

Поэтому

$$\frac{AK}{BK}\cdot\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CM}{DM}\cdot\frac{DN}{AN}=1. \qquad (1)$$

Рассмотрим точку N', в которой плоскость KLM пересекает прямую AD. Покажем, что

$$\frac{AK}{BK}\cdot\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CM}{DM}\cdot\frac{DN'}{AN'}=1. \qquad (2)$$

Для этого рассмотрим проекцию этого четырехугольника на прямую, перпендикулярную плоскости KLM. Точки K, L, M и N' при этом проецируются в одну и ту же точку X (рис. 8).

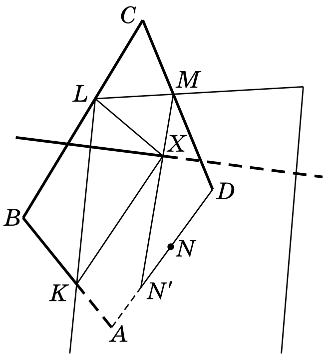


Рис. 8

Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — проекции точек A, B, C, D на эту прямую. Отношения отрезков, лежащих на одной прямой, при проецировании сохраняются, поэтому

$$\frac{AK}{BK}\cdot\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CM}{DM}\cdot\frac{DN'}{AN'}=\frac{A_1X}{B_1X}\cdot\frac{B_1X}{C_1X}\cdot\frac{C_1X}{D_1X}\cdot\frac{D_1X}{A_1X}.$$

После сокращения в правой части равенства получим 1, откуда и следует равенство (2). Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\frac{DN}{AN}=\frac{DN'}{AN'},$$

и поскольку точки N и N' лежат на отрезке AD, то N совпадает с N'. Все точки K, L, M и N лежат в одной плоскости.

14-я олимпиада, 1951 г.

14.01. (*7–8-е классы*) Доказать, что многочлен

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1$$

при всех значениях x положителен.

Доказательство. Можно заметить, что нечетные степени x входят в этот многочлен со знаком минус, поэтому при отрицательных значениях x значение $(-x^9)$ и $(-x)$ — положительное. Остальные слагаемые тоже положительны при отрицательных значениях x, а потому и сам многочлен положителен при $x < 0$.

При $x = 0$ значение многочлена равно 1, значит, он тоже положителен.

Что же происходит со значениями многочлена при положительных значениях x?

При очень больших значениях x выполняются неравенства

$$x^{12} > x^9 > x^4 > x;$$

вычитая из большего меньшее, мы получим положительный результат:

$$x^{12}-x^9 > 0,\ x^4-x>0,$$

а тем самым получим и положительное значение многочлена

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1. \qquad (*)$$

При $x = 1$ вышеприведенные неравенства превратятся в равенства, а значение многочлена будет равно 1, то есть останется положительным.

При $0 < x < 1$ неравенства изменят знак на противоположный:

$$x^{12} < x^9 < x^4 < x < 1.$$

Что же произойдет с многочленом?

Мы по-прежнему можем вычесть из большего меньшее и получить положительный результат:

$$x^4-x^9>0,\ 1-x>0,$$

а значение x^{12} тоже положительное при $0 < x < 1$, поэтому и многочлен (*) положителен.

Мы разобрали все возможные значения x, и во всех случаях многочлен принимает положительные значения, что и требовалось доказать.

14.03. (*7–8-е классы*) Какое число больше:

$$\frac{2{,}00\ldots04}{(1{,}00\ldots04)^2+2{,}00\ldots04}$$

или

$$\frac{2{,}00\ldots02}{(1{,}00\ldots02)^2+2{,}00\ldots02}?$$

(Во всех указанных числах после запятой сначала идут 10 нулей.)

Указание. Докажите, что для положительных a, b, c, d, если $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, то $\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$.

Решение. Неизвестное пока нам соотношение между данными дробями обозначим галочкой «$\vee$» (знак неравенства неизвестного пока нам смысла). А противоположное ему соотношение (неравенство противоположного смысла) будем обозначать перевернутой галочкой «$\wedge$». Тогда заменим определяемое отношение двух дробей противоположным соотношением двух обратных дробей:

$$\frac{2{,}00\ldots04}{(1{,}00\ldots04)^2+2{,}00\ldots04}\vee\frac{2{,}00\ldots02}{(1{,}00\ldots02)^2+2{,}00\ldots02}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(1{,}00\ldots04)^2+2{,}00\ldots04}{2{,}00\ldots04}\wedge\frac{(1{,}00\ldots02)^2+2{,}00\ldots02}{2{,}00\ldots02}.$$

Упростим полученные дроби, разделив числители на знаменатели:

$$\frac{(1{,}00\ldots04)^2}{2{,}00\ldots04}+1 \wedge \frac{(1{,}00\ldots02)^2}{2{,}00\ldots02}+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1{,}00\ldots04)^2}{2{,}00\ldots04} \wedge \frac{(1{,}00\ldots02)^2}{2{,}00\ldots02} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1{,}00\ldots04)^2}{2\cdot 1{,}00\ldots02} \wedge \frac{(1{,}00\ldots02)^2}{2\cdot 1{,}00\ldots01} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1{,}00\ldots04)^2}{1{,}00\ldots02} \wedge \frac{(1{,}00\ldots02)^2}{1{,}00\ldots01}.$$

И наконец освободимся от дробей:

$$(1{,}00\ldots04)^2 \cdot 1{,}00\ldots01 \wedge (1{,}00\ldots02)^3.$$

Так и напрашивается использовать неравенство Коши для трех положительных чисел, два из которых равны 1,00…04, а третье равно 1,00…01. Но их среднее геометрическое меньше их среднего арифметического, равного

$$\frac{(1{,}00\ldots04+1{,}00\ldots04+1{,}00\ldots01)}{3}=1{,}00\ldots3,$$

что не дает ответа на вопрос задачи.

Однако обозначим наши числа так:

$$1 + 4a,\ 1 + a,\ 1 + 2a.$$

Тогда сразу видно, что

$$(1 + 4a)(1 + a) > (1 + 2a)^2,$$

а отсюда и вся левая часть последнего неравенства больше его правой части. Значит, знак «$\wedge$» расшифровывается как «$>$», а потому исходный знак неравенства «$\vee$» расшифровывается как знак «$<$».

Ответ: первое число меньше второго.

14.11. (*7–8-е классы*) Доказать, что число $1\underbrace{0\ldots0}_{49}5\underbrace{0\ldots0}_{99}1$ не является кубом никакого целого числа.

Доказательство. Чтобы доказать, что число A не является кубом никакого целого числа, достаточно доказать, что это число больше куба некоторого целого числа n и меньше куба следующего за ним целого числа $n + 1$.

Рассматриваемое число A равно $10^{150} + 5 \cdot 10^{100} + 1$. Очевидно, что оно больше $(10^{50})^3$. Сравним число A с кубом следующего натурального числа: $(10^{50} + 1)^3$.

$$A - (10^{50} + 1)^3 =$$
$$= 10^{150} + 5 \cdot 10^{100} + 1 - (10^{150} + 3 \cdot 10^{100} + 3 \cdot 10^{50} + 1) =$$
$$= 2 \cdot 10^{100} - 3 \cdot 10^{50} = 10^{50}(2 \cdot 10^{50} - 3) > 0,$$

значит, $A > (10^{50} + 1)^3$.

Проверяем следующее натуральное число, то есть $(10^{50} + 2)^3$:

$$(10^{50} + 2)^3 = 10^{150} + 6\cdot 10^{100} + 12\cdot 10^{50} + 8 =$$
$$= (10^{150} + 5 \cdot 10^{100} + 1) + 10^{100} + 12 \cdot 10^{50} + 7 > A.$$

Значит, число A, равное $10^{150} + 5 \cdot 10^{100} + 1$, не является кубом никакого целого числа, потому что оно находится между кубами двух последовательных натуральных чисел: $10^{50} + 1$ и $10^{50} + 2$.

14.13. (*7–8-е классы*) Доказать, что сумма

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

при всех n есть полный квадрат.

Доказательство. Индукцией по n легко доказать, что

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \qquad (*)$$

1) База индукции очевидна.

2) Пусть верно равенство (*). Перейдем к $n + 1$:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=$$

$$=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+1}{4}\right)=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Что и требовалось доказать.

Но можно решить эту задачу по-иному, используя тождество: любое произведение ab можно представить в виде

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

$$ab=\frac{4ab}{4}=\frac{2ab+2ab}{4}=\frac{2ab+2ab+a^2-a^2+b^2-b^2}{4}=$$

$$=\frac{(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)}{4}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Применим это тождество к произведениям

$$1^3 = 1^2 \cdot 1,\ 2^3 = 2^2 \cdot 2,\ \ldots,\ n^3 = n^2 \cdot n:$$

$$1^3=1^2\cdot 1=\left(\frac{1^2+1}{2}\right)^2-\left(\frac{1^2-1}{2}\right)^2=1^2-0^2,$$

$$2^3=2^2\cdot 2=\left(\frac{2^2+2}{2}\right)^2-\left(\frac{2^2-2}{2}\right)^2=3^2-1^2,$$

$$3^3=3^2\cdot 3=\left(\frac{3^2+3}{2}\right)^2-\left(\frac{3^2-3}{2}\right)^2=6^2-3^2,$$

$$4^3=4^2\cdot 4=\left(\frac{4^2+4}{2}\right)^2-\left(\frac{4^2-4}{2}\right)^2=10^2-6^2,$$

…

$$n^3=n^2\cdot n=\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2-\left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2.$$

Заметим, что при переходе от $n - 1$ к n уменьшаемое в формуле для $n - 1$ становится равным вычитаемому в формуле для n, то есть

$$\left(\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2,$$

поэтому при сложении этих равенств в левой части образуется сумма кубов чисел от 1 до n, а в правой части остается только $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

14.19. (*9–10-е классы*) Из всех ортогональных проекций правильного тетраэдра на различные плоскости найти проекцию наибольшей площади.

Решение. Проекция правильного тетраэдра на плоскость может быть треугольником или четырехугольником.

В первом случае она является проекцией одной из граней, поэтому ее площадь не превосходит $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — ребро тетраэдра.

Во втором случае будем находить площадь как половину произведения длин диагоналей на синус угла между ними. В этом случае максимум достигается, когда длины обеих диагоналей равны ребру тетраэдра, а угол между ними прямой, то есть когда пара противоположных ребер тетраэдра параллельна плоскости проекции. Остается заметить, что

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} < \frac{a^2}{2}.$$

Ответ: это проекция правильного тетраэдра на плоскость, параллельную двум противоположным ребрам тетраэдра. Площадь проекции равна $\frac{a^2}{2}$.

15-я олимпиада, 1952 г.

15.02. (*7-й класс*) Доказать тождество

$$(ax + by + cz)^2 + (bx + cy + az)^2 + (cx + ay + bz)^2 =$$
$$= (cx + by + az)^2 + (bx + ay + cz)^2 + (ax + cy + bz)^2.$$

Указания. 1. Выясните, какого вида слагаемые получаются при возведении многочлена в квадрат. 2. Раскройте скобки в выражении $(m + n + p)^2$.

Доказательство. Нужно убедиться, что после раскрытия скобок в левой и правой частях получаются одни и те же слагаемые. Технически это можно сделать по-разному.

Способ I. Раскрыть все скобки и вычеркнуть пары одинаковых слагаемых слева и справа.

Способ II. Описать способ получения скобок в левой и в правой частях и объяснить, почему в обеих частях окажутся одни и те же квадраты данных слагаемых и одни и те же их попарные удвоенные произведения.

Способ III. Составить таблицы с указанием местонахождения каждого из 18 видов получающихся слагаемых. Опишем подробно третий способ решения.

Раскрыв скобки, мы в обеих частях доказываемого тождества получим два и только два вида слагаемых: девять квадратов слагаемых в скобках и девять удвоенных произведений всевозможных пар слагаемых внутри каждой скобки. Убедимся, что каждое слагаемое встречается по одному разу в левой и в правой части, для чего составим таблицы (см. таблицы 1 и 2 внизу).

Как видно, слагаемые квадраты слева и справа встречаются по одному разу. Тоже можно сказать и об удвоенных произведениях. Вывод: левая и правая части состоят из одних и тех же слагаемых. Тождество доказано.

15.03. (*7-й класс*) Если все грани параллелепипеда — равные между собой параллелограммы, то они являются ромбами. Доказать.

Доказательство. У равных параллелограммов все стороны соответственно равны. Значит, если нижняя грань параллелепипеда равна его передней грани, то ребро AB нижней грани равно ребру AA_1 передней грани. Но AB и AA_1 являются смежными ребрами левой грани. Значит, левая грань — параллелограмм с равными смежными сторонами, то есть ромб (рис. 9).

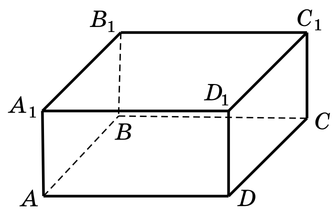


Рис. 9

Так же доказывается, что передняя и нижняя грани ромбы. А три остальные грани — ромбы, так как соответственно равны рассмотренным.

Местонахождение квадратов *Таблица 1*

	a^2x^2	b^2y^2	c^2z^2	b^2x^2	c^2y^2	a^2z^2	c^2x^2	a^2y^2	b^2z^2
Номер скобки слева	1	1	1	2	2	2	3	3	3
Номер скобки справа	3	1	2	2	3	1	1	2	3

Местонахождение удвоенных произведений *Таблица 2*

	$2abxy$	$2acxz$	$2bcyz$	$2bcxy$	$2abxz$	$2acyz$	$2acxy$	$2bcxz$	$2abyz$
Номер скобки слева	1	1	1	2	2	2	3	3	3
Номер скобки справа	2	1	3	1	3	2	3	2	1

15.10. (*9-й класс*) Доказать, что если

$$|x| < 1, |y| < 1,$$

и

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1.$$

Доказательство. Упростим последнее неравенство. Так как по условию $|x| < 1$ и $|y| < 1$, то $|1 - xy| > 0$, а, значит, $\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1$ равносильно неравенству:

$$|x - y| < |1 - xy| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - y)^2 < (1 - xy)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1 + x^2y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(y^2 - 1) > 0.$$

Последнее неравенство сразу следует из условия.

15.14. (*10-й класс*) Найти соотношение между arcsin cos arcsin x и arcos sin arccos x.

Решение. Поскольку

$$0 \le \arccos x \le \pi \text{ и } -\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2},$$

то

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Отсюда следует, что

$$\cos(\arcsin x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \sin(\arccos x),$$

а тогда

$$\arcsin(\cos\arcsin x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\sin\arccos x).$$

Ответ: $\arcsin\cos\arcsin x + \arccos\sin\arccos x = \frac{\pi}{2}$.

15.15. (*10-й класс*) Доказать, что при целом $n \ge 2$ и $|x| < 1$ справедливо неравенство

$$(1 - x)^n + (1 + x)^n < 2^n.$$

Доказательство. *Способ I.* Индукция по n (индуктивный переход):

$$(1 - x)^{n+1} + (1 + x)^{n+1} <$$
$$< ((1 - x)^n + (1 + x)^n)((1 - x) + (1 + x)) <$$
$$< 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

Способ II. Сумма коэффициентов многочлена $P(n) = (1 + x)^n$ равна $P(1) = 2^n$. Сумма коэффициентов многочлена $Q(n) = (1 - x)^n$ равна $Q(1) = 0$. Значит, сумма коэффициентов многочлена $P(n) + Q(n)$ равна 2^n. Но этот многочлен состоит только из слагаемых вида ax^m с положительными коэффициентами (все слагаемые с отрицательными коэффициентами уничтожаются), а потому он меньше суммы своих коэффициентов a, так как, по условию, модуль x меньше единицы.

15.22. (*7-й класс*) Дан отрезок AB. Найти множество вершин C остроугольных треугольников ABC.

Ответ. Точки C, лежащие на окружности, построенной на AB как на диаметре, образуют прямоугольные треугольники ABC с прямым углом C (рис. 10). То же самое относится и к точкам прямых a и b, перпендикулярных AB и касающихся построенной окружности (прямые углы либо в точке A, либо в точке B).

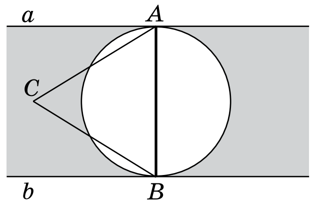


Рис. 10

Точки C, находящиеся внутри окружности или вне полосы, образованной прямыми a и b, образуют тупоугольные треугольники. Точки C, находящиеся внутри закрашенной области, образуют остроугольные треугольники.

15.23. (*8-й класс*) Найти первые шестьдесят десятичных знаков числа $\sqrt{0{,}99\ldots99}$ (60 девяток).

Решение. Число $0{,}99\ldots99 < 1$, поэтому

$$\sqrt{0{,}99\ldots99} > 0{,}99\ldots99.$$

Первые 60 знаков увеличить невозможно, поэтому первые шестьдесят десятичных знаков числа $\sqrt{0{,}99\ldots99}$ — это девятки.

Увеличить число 0,99...99 можно только за счет добавления следующих десятичных знаков.

15.26. (*8-й класс*) 99 прямых разбивают плоскость на n частей. Найти все возможные значения n, меньшие 199.

Указание. Убедитесь, что возможны только четыре взаимоисключающие положения девяноста девяти прямых на плоскости:

1) все прямые пересекаются в одной точке;

2) все прямые параллельны между собою;

3) имеются две пересекающиеся прямые, а все остальные прямые параллельны одной из этих двух прямых;

4) существуют три прямые, пересекающиеся между собой в трех различных точках, не лежащих на одной прямой, — в трех вершинах треугольника.

Решение. Рассмотрим все четыре возможности.

1) Первое расположение 99 прямых: все прямые пересекаются в одной точке. Легко понять, что в этом случае окажется 198 областей. Эта возможность соответствует условию задачи: областей меньше 199.

2) Все 99 прямых параллельны между собой. И это легко понять — окажется всего 100 областей. Этот результат: 100 областей, также соответствует требованию задачи, так как он меньше 199.

3) Есть две пересекающиеся прямые, а каждая из остальных 97 прямых параллельна одной из этих двух. Это более сложный вариант. Рассмотрим его подробно.

Всего прямых у нас 99, поэтому прямых, параллельных какой-нибудь из данных, будет не меньше 50. Пусть это 50 прямых, включающих прямую a. Они делят плоскость на 51 область. Проведем теперь пересекающую их прямую. Она разделит каждую из имеющихся областей на две области, и областей окажется не меньше 102. Если существует еще одна прямая, пересекающая a, то проведем теперь и ее. Она добавит к имеющимся 102 областям еще не меньше 51 области, всего областей окажется не меньше 153. Если есть еще одна прямая, пересекающая a, то она добавит к имеющимся еще не меньше 51 области, и всего областей окажется не меньше 204, что уже превышает требование задачи.

Итак, нужно, чтобы мы к наиболее многочисленной группе прямых, параллельных a, добавили не больше двух прямых, параллельных между собой и пересекающих a. Но всего прямых у нас 99. Остается рассмотреть две возможности этого варианта.

А) Прямых, пересекающих a, всего две, а прямых, параллельных a (включая и саму a), всего 97. Тогда 97 параллельных прямых делят плоскость на 98 частей, а каждая из пересекающих их прямых добавляет еще по 98 частей. Вместе оказывается 294 области, что превышает указанное в условии задачи.

Б) Прямых, пересекающих a, всего одна, а прямых, параллельных a (включая и саму a), всего 98. Тогда 98 параллельных прямых делят плоскость на 99 областей, а пересекающая их прямая добавляет еще 99 областей. Вместе оказывается 198 областей, что соответствует условию задачи: меньше 199.

4) Среди 99 прямых есть хотя бы три прямые, попарно пересекающиеся в трех вершинах треугольника, A, B и C. В этом случае мы не получим результатов, соответствующих условию задачи: меньше 199 областей. Доказательство состоит из следующих четырех утверждений.

А) Прямые AB, AC и BC делят плоскость на семь областей.

Б) Каждая из остальных 96 прямых имеет хотя бы одну общую точку с этими тремя прямыми, а значит, делится этой точкой не меньше чем на две части (два луча).

В) Каждый из найденных двух лучей отделяет новую область на плоскости, таким образом, каждая новая прямая добавляет к имеющимся еще не менее двух областей.

Г) Таких прямых, кроме первых трех, имеется $99 - 3 = 96$, а потому всего областей оказывается не меньше $7 + 96 \cdot 2 = 199$, что не соответствует условию задачи.

Ответ: 99 прямых могут разделить плоскость только на 100 или на 198 областей (количества меньшие 199).

15.34. (*8-й класс*) Доказать, что ни при каком целом a ни один многочлен вида

$$3x^{2n} + ax^n + 2 \qquad (1)$$

не делится на многочлен

$$2x^{2m} + ax^m + 3. \qquad (2)$$

Доказательство. Предположим, что многочлен (1) делится на многочлен (2). Тогда каждый корень многочлена (2) является также корнем многочлена (1).

Найдем корни многочлена (2). Обозначим x^m через t, тогда

$$t_{1,\,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 24}}{4} \text{ и } x_{1,\,2} = \sqrt[m]{t_{1,\,2}}. \qquad (*)$$

Если $a^2 - 24 < 0$, то действительных корней многочлена (2) не существует. Нет действительных корней и если m четное, а выражение $t_{1,\,2} < 0$.

Чтобы исключить эти варианты, которые приводят к комплексным числам, рассмотрим $a \le -5$. Покажем, что в этом случае есть корень многочлена (2), который не является корнем многочлена (1).

Найдем корни многочлена (1). Обозначим x^n через v, тогда

$$v_{1,\,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 24}}{6},$$

$$x_{1,\,2} = \sqrt[n]{v_{1,\,2}}.$$

Отсюда

$$|x_1x_2| = \sqrt[n]{v_1v_2} = \sqrt[n]{\frac{24}{36}} > 1.$$

Но из равенства (1) следует, что

$$|x_1x_2| = \sqrt[m]{t_1t_2} = \sqrt[m]{\frac{24}{16}} < 1.$$

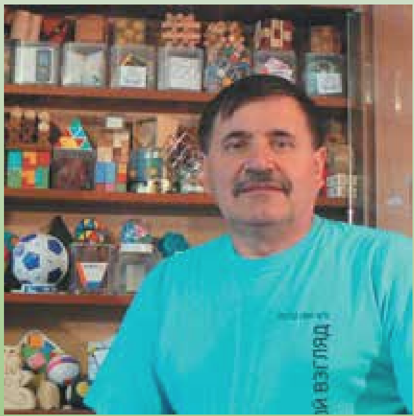
Противоречие.

Тем самым доказано, что для $a \le -5$, предположение, что многочлен (1) делится на многочлен (2), не верно. Не верно оно и для $a \ge 5$, но доказательство основывается на знании комплексных чисел.

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

Рисунки предоставлены автором

ГОЛОВОЛОМКА «ПЕНТАМИНО-2020»



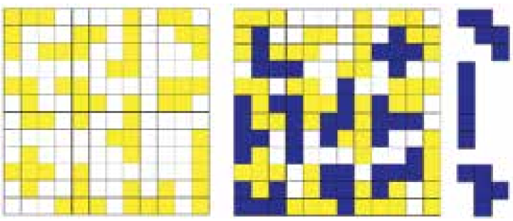
Ведущий рубрики — Николай Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

Всероссийский клуб ценителей головоломок «Диоген» ежегодно проводит чемпионат России по решению головоломок. Он проводится в двух форматах — очном и заочном. Интересно узнать, какие головоломки предлагают решить участникам во время проведения чемпионата? Сразу отметим, что каждый год, как правило, бывает головоломка с пентамино, поэтому предлагаем познакомиться с головоломкой «Пентамино-2020» 26-го заочного чемпионата.

Для этого надо запастись двумя наборами пентамино двух контрастных цветов, например, один набор желтого цвета, другой — синего. Элементы можно вырезать из цветной бумаги, но важно, чтобы с обеих сторон элементы были одного цвета, потому что при поиске решения их можно как угодно поворачивать и переворачивать. Кроме этого, на бумаге нарисуйте квадрат размером 12×12 и разбейте его на единичные квадратики, учитывая, что квадратики на бумаге должны быть равными квадратикам, из которых составлены элементы пентамино. А теперь собственно задание.

Расположите на игровом поле 12×12 элементы желтого комплекта пентамино так, чтобы они не касались друг друга даже уголками. Теперь в свободные клетки игрового поля между желтыми пентамино вставьте элементы синего комплекта пентамино, также чтобы они не касались друг друга даже уголками.

На рисунке слева показан один из вариантов расположения элементов желтого комплекта, справа показано, как на свободные клетки поместить еще девять элементов синего пентамино. При этом три элемента не поместились, им на игровом поле не нашлось места, значит, головоломка не решена. Попробуйте уложить два комплекта пентамино, чтобы выполнялись все условия задачи, и вы в полной мере ощутите себя участником чемпионата России по решению головоломок.



Эту головоломку прислал к нам в редакцию Константин Томович Шамсутдинов, известный читателям журнала как эксперт по анализу и поиску кратчайших решений головоломок из нашей кладовой. Он победитель этого чемпионата и является автором самого лучшего решения головоломки. В чем изюминка его решения, вы узнаете в приложении к журналу.

Автором этой замечательной головоломки является Ольга Сергеевна Леонтьева — президент российского клуба ценителей головоломок «Диоген», организатор чемпионатов России по решению головоломок, автор многих книг и публикаций, посвященных головоломкам.

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

ВКЛЮЧЕНИЕ/ВЫКЛЮЧЕНИЕ

ПОСТРОЕНИЕ

Каждый пользователь электрических устройств, от кофеварки до компьютера, использует кнопку включить / выключить. На любом устройстве кнопка, включающая и выключающая сеть, промаркирована одним и тем же символом — окружностью с соразмерным ей вертикальным отрезком рядом или внутри ее.

При взгляде на символ у пользователя возникает ассоциация с нулем и единицей. И это неслучайно. Действительно, это 1 и 0, которые в двоичной системе и кодируют понятия «включить» и «выключить». Так со времен Второй мировой войны было принято помечать соответственно кнопки включения и выключения питания электроприборов; кнопок изначально было две.

В начале 1970-х годов впервые был применен кнопочный переключатель с двумя фиксированными положениями, а два символа соединили в один.

ISSN 2658-4042

ПОДПИСКА ПО КАТАЛОГУ АРЗИ: 33363